ساختمان داده‌ها

مؤلف : فرشید شیرافکن

دانشجوی دکترای بیوانفورماتیک دانشگاه تهران

ناشر: سازمان علمی آموزش فرادرس

بزرگترین پلتفرم آموزش آنلاین ایران

وب: www.faradars.org

تقدیم به:

روح پاک پدرم

- فرشید شیرافکن

سخن ناشر

در عین تمام نقدهای وارد شده به کنکور، هنوز راه‌حلی عملی که در جمیع جوانب، بهتر از سبک کوتاه و چند گزینه‌ای سؤالات باشد؛ ارائه نشده است. همین موضوع، کنکور را به ویژه کنکور کارشناسی ارشد به عنوان یک آزمون متمرکز و سراسری، از اهمیت دوچندانی برخوردار می‌کند.

یکی از آسیب‌های همراه با این آزمون سراسری این است که فضای رقابتی آن با ایجاد مؤسسات گوناگون، به سرعت از فضای یک رقابت علمی تبدیل به فضای رقابت اقتصادی می‌شود؛ به گونه‌ای که هزینه سرسام آور کلاس‌ها، دوره‌ها و منابع مرتبط با آزمون، از عهده بسیاری از دانشجویان خارج می‌شود. دانشجویانی که در عین استعداد تحصیلی بالا، در میدان رقابت مالی تحمیلی، در عین تمام شایستگی‌های خود، قدرت ادامه مسیر را از دست می‌دهند یا به نتیجه‌ای که در فضای مساوی مالی برای همه باید به آن می‌رسیدند، دست نمی‌یابند.

یکی از اهداف و آرمان‌های فرادرس به عنوان بزرگ‌ترین پروژه آموزش دانشگاهی اجرا شده بر بستر وب کشور، ایجاد دسترسی همگانی و یکسان به آموزش و دانش؛ مستقل از جغرافیا، زمان و سطح مالی دانشجویان بوده است. سیاست کاری فرادرس در راستای این آرمان، انتشار آموزش‌های ویدئویی تخصصی و دانشگاهی رایگان و یا بسیار کم هزینه، با تدریس مجرب‌ترین اساتید داخل و خارج کشور بوده است.

ما با انتشار رایگان این کتاب (به همراه نزدیک به ده کتاب رایگان دیگر) یکی از گام‌های دیگر خود را در راستای آرمان فرادرس برداشتیم. کتاب حاضر که حاصل نزدیک به یک دهه تدریس و پژوهش و تألیف مؤلف و مدرس فرادرس می‌باشد؛ در عین هزینه‌های بالای تألیف و آماده‌سازی، به جای انتشار و فروش؛ با تأمین مالی و سرمایه‌گذاری فرادرس به عنوان ناشر، به صورت کاملاً رایگان منتشر می‌شود. ما در گام‌های بعدی نیز تلاش خواهیم کرد که تا هر جا بتوانیم، حتی شده یک کتاب مرجع دیگر و بیشتر را با پرداخت هزینه، آزادسازی کرده و به صورت رایگان منتشر کنیم.

مؤلفین و ناشرینی که تمایل به واگذاری حق انتشار کتاب خود به فرادرس را دارند، می‌توانند با ایمیل ebooks@faradars.org مکاتبه نمایند. ما این کتاب‌ها را با پرداخت هزینه تألیف به مدرس و ناشر، به صورت رایگان منتشر خواهیم کرد تا همه دانشجویان مستقل از سطح مالی، به منابع مفید آزمون دسترسی داشته باشند. همچنین اگر ایده و نظری در خصوص کتاب‌های رایگان فرادرس داشته باشید، خوشحال می‌شویم که آن را با ایمیل ebooks@faradars.org مطرح نمایید.

سازمان علمی آموزش فرادرس

بزرگترین پلتفرم آموزش آنلاین ایران

وب: www.faradars.org

منبع مطالعاتی تکمیلی مرتبط با این کتاب

آموزش ساختمان داده‌ها

ساختمان داده‌ها، یکی از دروس مهم و پایه‌ای دانشگاهی است که پیش نیاز دروس مختلف رشته کامپیوتر است و به عنوان مبحثی که نکات فراوانی دارد، در کنکور کارشناسی ارشد کامپیوتر و کنکور دکتری هوش مصنوعی و نرم‌افزار از دروس با ضرایب بالا می‌باشد.

آموزش ساختمان داده‌ها، توسط مهندس فرشید شیرافکن، یکی از بهترین مدرسین مسلط به مباحث ساختمان داده‌ها، ارائه شده است.

مدرس: مهندس فرشید شیر افکن

مدت زمان: ۱۰ ساعت

جهت مشاهده آموزش ویدئویی این آموزش – کلیک کنید faradars.org /fvds9402

درباره مدرس

مهندس فرشید شیرافکن کارشناس ارشد مهندسی کامپیوتر گرایش نرم‌افزار است و در حال حاضر دانشجوی دکترای بیوانفورماتیک دانشگاه تهران هستند. ایشان از مدرسین نمونه در زمینه ارائه و آموزش دروس دانشگاهی انتخاب شده‌اند.

ایشان مشاور کنکور هستند و بیش از ۳۰ کتاب در زمینه کنکور رشته کامپیوتر تألیف نموده‌اند. ایشان در حال حاضر به عنوان یکی از برترین مدرسین فرادرس از جهت کمیت و کیفیت دروس ارائه شده، نزدیک به ۲۰ عنوان درسی را در قالب آموزش ویدئویی از طریق فرادرس منتشر کرده‌اند. این مجموعه دروس تا کنون مورد استفاده ده‌ها هزار دانشجوی سراسر کشور قرار گرفته اند.

مشاهده همه آموزش های تدریسی و تالیفی توسط مؤلف کتاب – کلیک کنید.

کتب رایگان دیگر از این مجموعه آموزشی

۱. آموزش زبان برنامه سازی C++ – کلیک کنید (+)
۲. آموزش شیءگرایی در سی پلاس پلاس – کلیک کنید (+)
۳. آموزش نظریه زبان‌ها و ماشین – کلیک کنید (+)
۴. آموزش پایگاه داده‌ها – کلیک کنید (+)
۵. آموزش سیستم عامل – کلیک کنید (+)
۶. آموزش ذخیره و بازیابی اطلاعات – کلیک کنید (+)

برای دانلود رایگان این مجموعه کتب، به لینک زیر مراجعه کنید:

http://faradars.org/computer-engineering-exam

دسته‌بندی موضوعی آموزش‌های فرادرس، در ادامه آمده است:			
			
برنامه نویسی – کلیک (+)	آموزش های دانشگاهی و تخصصی – کلیک (+)	هوش مصنوعی و یادگیری ماشین – کلیک (+)	مهندسی برق الکترونیک و روباتیک – کلیک (+)
			
دروس دانشگاهی – کلیک (+)	مباحث مشترک – کلیک (+)	مهارت های دانشگاهی – کلیک (+)	نرم افزارهای تخصصی – کلیک (+)
			
مهندسی نرم افزار – کلیک (+)	نرم افزارهای عمومی – کلیک (+)	طراحی و توسعه وب – کلیک (+)	آموزش های عمومی – کلیک (+)

فهرست مطالب

صف حلقوی

درج و حذف در صف حلقوی

پشته و عملیات push و pop

کاربردهای پشته

ارزشیابی عبارات (تبدیل infix و prefix و postfix به یکدیگر)

الگوریتم تبدیل عبارت infix به postfix توسط پشته

الگوریتم محاسبه یک عبارت به فرم Postfix توسط پشته

کاربرد پشته در زیر برنامه های بازگشتی

فصل ۵ : لیست پیوندی.....

لیست پیوندی یک طرفه

الگوریتم های کار بر روی لیست پیوندی یک طرفه (اضافه و حذف گره- اتصال – وارون و....)

پیاده سازی پشته با لیست پیوندی

پیاده سازی صف با لیست پیوندی

لیست پیوندی دو طرفه

لیست پیوندی حلقوی

فصل ۶ : درخت.....

تعاریف اولیه

درخت دودویی(کامل ،پر)

درخت k تایی

درخت دودویی کامل شماره گذاری شده

روشهای ذخیره درخت دودویی

تعداد درخت های دودویی

الگوریتم های کار بر روی درخت دودویی

پیمایش درخت دودویی

درخت نخی دودویی

درخت عمومی

جنگل

درخت دودویی گسترش یافته (2-Tree)

فصل ۱۰ : مرتب سازی.....

فصل ۱۱ : درهم سازی.....

فصل ۱

مرتبه اجرایی

مجموعه محدودی از دستورالعملها که با دنبال کردن آنها هدف خاصی برآورده می شود را الگوریتم می نامند. در هر الگوریتم مواردی همچون ورودی، خروجی، قطعیت، محدویت و کارایی قابل بررسی می باشند. به علت وجود بیش از یک راه حل برای یک مسأله، الگوریتم‌های متفاوتی مورد توجه قرار می‌گیرند که برای انتخاب یکی از آنها فاکتورهایی چون ملزومات برنامه‌نویسی، ملزومات عملیاتی (تأثیر زمان اجرا) و ملزومات حافظه‌ای
را باید در نظر گرفت. به علت مشکل بودن تجزیه و تحلیل دقیق ملزومات برنامه‌نویسی، تئوری پیچیدگی روی ملزومات حافظه‌ای و عملیاتی متمرکز می‌شود. ملزومات عملیاتی حساس‌تر از ملزومات حافظه‌ای بوده و معمولاً رکن کار می‌باشند. پس می‌توان عامل فضا را فدای زمان کرد، یعنی الگوریتمی پر حجم‌تر اما سریع نوشت.

نشان‌گذاری O

روشی است که اندازه‌گیری کمیتهای ملزومات عملیاتی را به گونه‌ای عمومی ممکن می‌سازد. پیچیدگی یک الگوریتم، تابعی است که مدت زمان اجرای استفاده شده توسط الگوریتم را بر حسب تعداد داده‌های ورودی n اندازه می‌گیرد. به طور نمونه $o(1)$ معرف زمان اجرای ثابت، $o(n)$ معرف زمان اجرای خطی و $o(n^2)$ معرف زمان اجرای مربعی است.

رابطه زیر برقرار است:

$$o(1) < o(\log n) < o(n) < o(n.\log n) < o(n^2) < o(2^n) < o(n!) < o(n^n)$$

این رابطه به طور نمونه مشخص می کند که الگوریتمی با مرتبه اجرایی $o(n.\log n)$ سریعتر از الگوریتمی با مرتبه اجرایی $o(n^2)$ است.

مرتبه اجرایی تابع $f(n)$ برابر $o(n^m)$ می باشد:

$$f(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

مثال

مرتبه اجرایی تابع $f(n) = 5n^2 - 3n + 4$ کدام است؟

حل: مرتبه اجرایی تابع f برابر $o(n^2)$ می باشد، چون موثرترین عبارت n^2 مـی باشـد یعنـی از همـه جمـلات سـریع‌تر رشـد می‌کند.

■

تذکر: تعداد تکرار حلقه زیر برابر $\left\lceil \frac{b-a+1}{k} \right\rceil$ می باشد:

```
for (i=a ; i<= b; i=i+k )
        ....
```

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 برابر است با $o(n)$:

```
for (i=l ;  i<=n ; i=i+1)
       x=x+1;
```

■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for(i=2 ; i<= n-1; i=i+2 )
      x=x+1;
```

حل: حلقه $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$ بار اجرا می شود، بنابراین مرتبه $o(n)$ می باشد.

■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for ( i=2 ; i<= n; i=i+4 )
       x=x+1;
```

حل: حلقه $\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil$ بار اجرا می شود، بنابراین مرتبه $o(n)$ می باشد.■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for( i=0 ; i< n^2 ; i=i+2)
       x=x+1;
```

حل:حلقه $\frac{n^2}{2}$ بار اجرا می شود، بنابراین مرتبه $o(n^2)$ می باشد■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1; را بدست آورید؟

```
i= n;
while (i >=1){
    x = x+1;
    i = i % 2;
 }
```

حل:

حلقه به ازای هر n بزرگتر یا مساوی 1، یک یا دو مرتبه اجرا می‌شود.چون باقیمانده تقسیم صحیح هر عدد بر دو، یا صفر است و یا یک. بنابراین مرتبه اجرایی $O(1)$ می باشد.

تذکر: اگر به جای عدد 2 در دستور i=i % 2 ، از هر عدد دیگری نیز استفاده شود، مرتبه اجرایی باز هم $O(1)$ خواهد بود. چون تعداد اجرای حلقه به پارامتر n وابسته نمی باشد.

■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for ( i=l ;  i<=n ; i=i*2 )
        x=x+1;
```

حل:

چون i مقادیر 1,2,4,16,... را می گیرد. بنابراین مرتبه اجرایی برابر $O(\log_2^n)$ یا $O(\lg n)$ می باشد.■

تذکر: می توان به جای $\log_2^n$ از واژه خلاصه logn و یا lgn استفاده کرد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 برابر است را مشخص کنید.

```
for( i=n ; i>1; i=i/2 )
      x=x+1;
```

حل: شمارنده i در هر بار اجرا، نصف می شود، بنابراین مرتبه $O(\lg n)$ است.

این حلقه را با دستور while نیز می توان نوشت:

```
i = n;
while( i>1) {
   x = x+1;
   i = i /2;
 }
```

■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for( i=n ; i>1; i=i/3 )
      x=x+1;
```

حل: شمارنده i در هر بار اجرا، تقسیم بر 3 می شود، بنابراین مرتبه $\log_3^n$ است.

تذکر: اگر به جای i>1 از i>0 در حلقه بالا استفاده می شد، حلقه هیچگاه تمام نمی شود، بنابراین زمان اجرا، بی نهایت می شود.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for (i=l ;  i<=n ; i++)
      x=x+1;
for (j=l ;  j<=m ; j++)
      x=x+1;
```

حل:

حلقه اول n مرتبه و حلقه دوم m مرتبه اجرا می شود. مرتبه برابر $O(n+m)$ می باشد.

تذکر: این حلقه ها تودرتو نمی باشند.

مرتبه اجرایی حلقه های تودرتو

اگر حلقه ها تو در تو باشند، مرتبه اجرایی از ضرب مرتبه اجرایی حلقه ها بدست می آید.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for( i=l ; i<=n ; i++)
  for( j=l ; j<=n ; j++)
        x=x+1;
```

حل: مرتبه اجرایی $O(n^2)$ می باشد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.(n زوج است)

```
for ( i=1 ; i<=n ; i++)
{
   for ( j=1 ; j<=n ; j++)
    {
      x=x+1;
    }
   n=n-1;
```

}

حل:

به ازای i=1 ، دستور x=x+1 ، n بار اجرا شده و سپس یک واحد از n کم می شود.

به ازای i=2 ، دستور x=x+1 ، n-1 بار اجرا شده و از n مجددا یک واحد کم می شود.

به ازای $i = \frac{n}{2}$، دستور x=x+1 ، $n - \frac{n}{2} + 1$ بار اجرا شده و از n یک واحد کم می شود.

به ازای $i = \frac{n}{2} + 1$ ، شرط برقرار نمی باشد و اجرای حلقه پایان می یابد.

بنابراین تعداد اجرای x=x+1 برابر است با:

$$n + (n-1) + (n-2) + ... + (n - \frac{n}{2} + 1) = \frac{3n^2 + 2n}{8}$$

در نتیجه مرتبه زمانی برابر $O(n^2)$ می باشد. ■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1; کدام است؟

```
for (i=1;  i<= n ; i++)
  for (j=1; j<=7 i ; j++)
        x=x+1;
```

حل:

تعداد دفعات تکرار دستور x=x+1 برابر است با: $7 \times \frac{n(n+1)}{2}$. بنابراین مرتبه $O(n^2)$ است.

■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1; را مشخص کنید.

```
for (i=l ; i<=n ; i++){
    k=n;
    while  (k >1)
     {
        k=k / 2;
        x=x+1;
      }
}
```

حل: حلقه for، n مرتبه و حلقه while، logn مرتبه تکرار می‌شود و چون حلقه‌ها متداخل هستند، مرتبه اجرایی $O(n.\log n)$ می باشد.

■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1; را مشخص کنید.

```
for( i=l ; i<=n; i++)
{
   for ( j=l ; j<=m; j++)
         x =x+1;
   for ( k=l ; i<=p; k++)
         x =x+1;
}
```

حل: مرتبه اجرایی for با شمارنده i برابر n ، for با شمارنده j برابر m و for با شمارنده k برابر p می باشد. چون دو حلقه داخلی پشت سر هم می باشند(نه متداخل)، مرتبه انها با هم جمع شده و در n ضرب می شوند، چون داخل حلقه با مرتبه n می باشند. بنابراین مرتبه اجرایی $O(n(m+p))$ است. ■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1; را مشخص کنید.

```
for (i=l ;  i<=n; i++){
    for (j=l ;  j<=m ; j++)
        x =x+1;
    j =1;
    while( j<=n )    {
       x= x+1;
       j=3*j;
     }
}
```

حل: حلقه for اول از $O(n)$ و حلقه for دوم از $O(m)$ و حلقه while از مرتبه $O(\log_3^n)$ است.

مرتبه دو حلقه داخلی چون تو در تو نیستند، با هم جمع شده و در مرتبه حلقه for خارجی ضرب می‌شوند:

$O(n(m+\log_3^n))$

■

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1; را مشخص کنید.

```
i = n;
while(i>1){
   i =i/2;
```

```
    j =n;
    while (j>1) {
        j=j/3;
        x=x+1;
      }
}
```

حل: حلقه داخلی با تقسیم مقدار شمارنده بر 3، به صورت لگاریتمی با $O(\log_3^n)$ اجرا شده و حلقه بیرونی با تقسیم شمارنده بر 2 به صورت $O(\log_2^n)$ اجرا می‌شود و چون دو حلقه متداخل هستند، جواب برابر حاصل ضرب این دو مقدار یعنی $O(\log_3^n \times \log_2^n)$ می باشد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید. $(n = 2^k)$

```
for ( i = n ; i>0 ; i=i/2)
  for ( j = i ; j <= n ; j=j+1)
        x=x+1;
```

i	2^k	2^{k-1}	2^{k-2}	.....	2^1	2^0
تعداد تکرار حلقه داخلی	1	$2^k - 2^{k-1}$	$2^k - 2^{k-2}$	.....	$2^k - 2^1$	$2^k - 2^0$

بنابراین داریم:

$$1 + 2^k - 2^{k-1} + 2^k - 2^{k-2} + ... + 2^k - 2^1 + 2^k - 2^0$$
$$= 1 + k.2^k - (2^{k-1} + 2^{k-2} + ... + 2^1 + 2^0) = 1 + k.2^k - (2^k - 1) = k.2^k - 2^k + 2$$
$$= n\lg n - \lg n + 2 = O(n\lg n)$$

تذکر: اگر شمارنده j به صورت j=j+a تغییر کند داریم: $1 + \frac{1}{a}[n\lg n - \lg n + 1]$

خواص سیگما

در بعضی از مسائل نیاز است که خواص $\sum$ را بدانید. این خواص در زیر آورده شده است:

$$\sum_{i=a}^{b} c = (b - a + 1) \times c \qquad \sum_{i=1}^{n} n = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^k \approx \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} k^i = \frac{k^n - 1}{k - 1} - 1 \qquad \sum_{i=1}^{n-1} ik^{i-1} = \frac{nk^{n-1}}{k-1} + \frac{1-k^n}{(k-1)^2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (i+1)(n-i) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1; کدام است؟

```
for ( t =1 ; t <= n–1 ; t++)
{
 for ( i=1 ; i<= n–t ; i++)
    {
      j= i+t;
    for ( k= i ; k<= j-1; k++)
        x=x+1;
    }
}
```

حل:

$$\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-t}\sum_{k=i}^{j-1}1=\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-t}(j-1-i+1)=\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-t}(i+t-1-i+1)$$
$$=\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-t}t=\sum_{t=1}^{n-1}t(n-t)=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

بنابراین مرتبه $O(n^3)$ است.

بررسی چند مثال از کاربرد سیگما

for (i=1; i<= n ; i++)
for (j=1; j<= n ; j++){
x=x+1;
x=x+1;
}
	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}2=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1=2\sum_{i=1}^{n}n=2n\sum_{i=1}^{n}1=2n\times n=2n^2$

for (i=1; i<= n ; i++) **for** (j=1; j<= i ; j++) x=x+1;	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1=\sum_{i=1}^{n}i=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$
for (k=0; k<= n-1 ; k++) **for** (i=1; i<= n-k ; i++) x=x+1;	$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k}1=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)=\sum_{k=0}^{n-1}n-\sum_{k=0}^{n-1}k=n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$
for (i=1; i<= n^3; i++) **for** (j=1; j<=i ; j++) x=x+1;	$\sum_{i=1}^{n^3}\sum_{j=1}^{i}1=\sum_{i=1}^{n^3}i=\frac{n^3(n^3+1)}{2}\in O(n^6)$
for (i=1; i<= n^2 ; i++) **for** (j=1; j<= log n ; j++) x=x+1;	$\sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{\log n}1=\sum_{i=1}^{n^2}\log n=\log n\sum_{i=1}^{n^2}1=n^2\times\log n$

تعداد اجرای دستور x=x+1; در t حلقه وابسته برابر $\binom{n+t-1}{t}$ است که از مرتبه n^t می باشد.

مثال

تعداد اجرای دستور x=x+1; کدام است؟

```
for (i=1;  i<=3 ; i++)
  for (j=1; j<= i ; j++)
```

```
for (k=1; k<= j ; k++)
  for (m=1; m<=k ; m++)
        x=x+1;
```

حل: دستور در داخل چهار حلقه وابسته قرار دارد، بنابراین تعداد اجرای آن برابر است با:

$$\binom{3+4-1}{4}=\binom{6}{4}=\frac{6!}{2!\times 4!}=15$$

تذکر بسیار مهم: در مواقعی که تغییر شمارنده به اندازه یک واحد نباشد، در صورت استفاده از $\sum$ باید یک متغیر جدید تعریف کرد.

مثال

مرتبه اجرایی شبه دستور زیر کدام است؟

```
for (i=1; i<=n ; i=i*2)
    for (j=1; j<= i ; j++)
          x=x+1;
```

حل: چون در حلقه اول متغیر i هر بار دو برابر می شود، قرار می دهیم: $i = 2^t$.

چون $1 \le i \le n$ ، بنابراین $0 \le t \le \log n$.

در حلقه دوم، متغیر j از 1 تا i یعنی 2^t تغییر می کند:

$$\sum_{t=0}^{\log n}\sum_{j=1}^{2^t}1=\sum_{t=0}^{\log n}2^t=2^{\log n+1}-1=2^{\log n}\times 2-1=2n-1$$

بنابراین از مرتبه $O(n)$ می باشد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1; کدام است؟

```
for ( i =1 ; i <= n ; i++)
  for ( j=1 ; j<= n ; j=2*j)
    for ( k= 1 ; k<= j ; k++)
        x=x+1;
```

حل:

حلقه اول n مرتبه تکرار می شود. در حلقه دوم چون متغیر j هر بار دو برابر می شود، به جای j از 2^t استفاده می کنیم که چون $1 \le j \le n$ داریم: $0 \le t \le \log n$.

در حلقه سوم متغیر k از 1 تا j یعنی 2^t تغییر می کند:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{\log n}\sum_{k=1}^{2^t}1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{\log n}2^t=\sum_{i=1}^{n}(2^{\log n+1}-1)=(2^{\log n+1}-1)\sum_{i=1}^{n}1=(2n-1)n$$

بنابراین از مرتبه $O(n^2)$ می باشد.

■

نمادهای θ,Ω

جهت نمایش مرتبه اجرایی می توان از نمادهای اومگای بزرگ (Ω)و تتا (θ)نیز استفاده کرد. این نمادها در کتاب طراحی الگوریتم اینجانب به طور مفصل بررسی شده اند. در این جا کافی است بدانید که برای بررسی صحت یک عبارت می توان به جای Ω از $\geq$ ، به جای θ از $=$ و به جای O از $\leq$ استفاده کرد.

مثال

عبارتهای زیر برقرار است:

$5n^2 \in \theta(n^2)$ $5n^2 \in \Omega(n^2)$ $5n^2 \in O(n^2)$

$n \in O(n^2)$ $n^2+10n \in \Omega(n^2)$ $n^3 \in \Omega(n^2)$

$n!=o(n^n)$ $\lg(n!)=\theta(n\lg n)$ $n^2 \sin n \in \Omega(n)$

$5n+31g\ n+10n1g\ n+7n^2 \in \theta(n^2)\log_2^n \in \theta(\log_{10}^n)$

■

مثال

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=1}^{n}i^2$ و $\sum_{i=1}^{n}i^3$ را به دست آورید.

حل:

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\theta(n^3) \quad \sum_{i=1}^{n}i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\theta(n^4) \quad \text{و}$$

■

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=1}^{n}i^k$ برابر $\theta(n^{k+1})$ می باشد.

مثال

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3$:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3 = \sum_{i=0}^{n} i^2 \sum_{j=0}^{n} j^3 = \theta(n^3)\theta(n^4) = \theta(n^7)$$

■

مثال

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{n} 3^i \times i^8$ را به دست آورید.

حل:

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i \times i^8 \le \sum_{i=0}^{n} 3^i \times n^8 = n^8 \sum_{i=0}^{n} 3^i = n^8 \times \frac{3^{n+1}-1}{3-1} \le n^8 3^n \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} 3^i \times i^8 = O(3^n n^8)$$ ■

مثال

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{n} 2^i$:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0 + 2^1 + ... + 2^n = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1 = \theta(2^n)$$

■

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{n} k^i$ برابر $\theta(k^n)$ می باشد.

مثال

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{\lg n} \lg(\frac{n}{2^i})$ را به دست آورید.

حل:

$$\sum_{i=0}^{\lg n} \lg n - \sum_{i=0}^{\lg n} \lg 2^i = \lg n \sum_{i=0}^{\lg n} 1 - \sum_{i=0}^{\lg n} i = \lg n(\lg n + 1) - \frac{\lg n(\lg n+1)}{2} = \frac{\lg n(\lg n+1)}{2} = \theta(\lg^2 n)$$ ■

کنکور ارشد

۱- پیچیدگی زمانی الگوریتم خاصی به صورت چند جمله ای زیر معین شده است. در این صورت زمان اجرای آن کدام است؟ (فرض کنید n بسیار بزرگ است) (ارشد IT – آزاد ۸۹)

$$P(n) = 2^n + 100n^3 + n\log_2^n$$

۱) $O(100n^3)$ ۲) $O(n\log_2^n)$

۳) $O(2^n+n^3)$ ۴) $O(2^n)$

حل: گزینه ۴ درست است.

بزرگترین جمله در عبارات داده شده 2^n می باشد.

۲- رتبه زمانی شبه کد زیر چیست؟(ارشد IT – دولتی ۸۶)

```
for ( i=1 ; i<=n ; i++)
  for ( j=1 ; j<=n ; j++){
        x=x+1;
        n--;
    }
```

۱) n ۲) n^2 ۳) $\log n$ ۴) $n\log n$

حل: گزینه ۱ درست است.

به ازای i=1 ، دستور x=x+1 ، $\frac{n}{2}$ بار اجرا می شود. به ازای i=2 ، دستور x=x+1 ، $\frac{n}{4}$ بار اجرا می شود. بنابراین داریم:

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}+...=n(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...)=n\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=n$$

در نتیجه مرتبه زمانی برابر $O(n)$ می باشد. جمله داخل پرانتز، مجموع جملات یک تصاعد هندسی با جمله اول 1/2 و قدرنسبت 1/2 است. مجموع n جمله اول یک تصاعد هندسی با جمله اول a و قدر نسبت q که $|q|<1$، برابر است با:

$$a+aq+aq^2+...=\frac{a}{1-q}$$

۳- مرتبه زمانی شبه کد زیر کدام گزینه است؟ (ارشد IT – دولتی ۸۹)

```
for ( i=1; i<=n; i++)
  for ( j=1; j<=n; j=j+i)
        x=x+1;
```

۱) n ۲) $n\log n$ ۳) $\log n$ ۴) n^2

حل: گزینه ۲ درست است.

دستور x=x+1 ، به ازای i=1 ، n بار اجرا می شود. به ازای i=2 ، $\frac{n}{2}$ بار اجرا می شود و .... بنابراین تعداد اجرای جمله x=x+1 برابر است با:

$$n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+...+\frac{n}{n}=n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})\approx n.\ln n \Rightarrow O(n.\log n)$$

۴- هزینه ی زمانی تکه برنامه زیر کدام است؟ (ارشد IT – دولتی ۸۹)

```
int   i=n;
while ( i>1){
   i /= 2;
   j = i;
  while(j>1)
    {
      j /= 3;
    }
}
```

۱) $O(\lg n)$ ۲) $O(\lg^2 n)$ ۳) $O(n)$ ۴) $O(n^2)$

حل: گزینه ۲ درست است.

حلقه اول از مرتبه $O(\log_2^n)$ و حلقه دوم از مرتبه $O(\log_3^n)$ است و چون دو حلقه تو در تو است، جواب ضرب آنها $O(\log_2^n \times \log_3^n)$ است.

لازم به ذکر است که لگاریتم ها در هر پایه ای از مرتبه یکدیگر هستند و می توان به جای $O(\log_3^n)$ از $O(\log_2^n)$ استفاده کرد. بنابراین داریم:

$$O(\log_2^n \times \log_3^n) = O(\log_2^n \times \log_2^n) = O(\log_2^n)^2 = O(\lg^2 n)$$

۵- پس از اجرای قطعه کد زیر، مقدار نهایی x چه مقداری خواهد بود؟ (ارشد IT- دولتی ۸۵)

```
x=0;
for( i=1 ; i <=n ; i++) {
  for( j=1 ; j<=n ; j++)
     x++;
  j=1;
  while( j< n )  {
    x++;
    j=j*2;
  }
}
```

۱) $n.\lceil \log n \rceil$ ۲) $n^2+\lceil \log n \rceil$ ۳) $n^2+n\lceil \log n \rceil$ ۴) $n(1+\lfloor \log n \rfloor)$

حل: گزینه ۳ درست است.

حلقه اول n مرتبه و دو حلقه داخل آن $n+\lceil \log n \rceil$ مرتبه اجرا می شوند. بنابراین تعداد اجرا برابر حاصل ضرب این دو مقدار خواهد بود:

$$n(n+\lceil \log n \rceil) = n^2 + n\lceil \log n \rceil$$

۶- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟ (ارشد کامپیوتر- آزاد ۸۶)

۱) $6*2^n + n^2 = \theta(n^2)$ ۲) $6*2^n + n^2 = \theta(2^n)$

۳) $6*2^n + n^2 = \Omega(2^n)$ ۴) $6*2^n + n^2 = \Omega(n^2)$

حل: جواب گزینه ۱ است.

به جای عبارت $6*2^n + n^2$ از عبارت 2^n استفاده می کنیم.(چون رشد آن بیشتر از n^2 است) . همچنین به جای θ از علامت = و به جای Ω از علامت $\geq$ استفاده شود. در این صورت گزینه ها به صورت زیر خواهند بود:

۱) $2^n = n^2$ ۲) $2^n = 2^n$ ۳) $2^n \geq 2^n$ ۴) $2^n \geq n^2$

که در این صورت نادرستی گزینه ۱ واضح است.

۷- کدام یک از عبارات زیر درست‌اند؟ (ارشد کامپیوتر- دولتی ۸۵)

الف- $e^{c\sqrt{n}} = O(e^{\sqrt{n}}) \quad c \geq 1$

ب- $n^2 = O(n \log n)$

ج- $n = O(n \log n)$

۱) فقط ب ۲) فقط ج ۳) الف و ب ۴) الف و ج

حل: گزینه ۲ درست است.

گزاره الف نادرست است، چون به ازای $c \geq 1$ داریم: $e^{c\sqrt{n}} \geq e^{\sqrt{n}}$.

گزاره "ب" نادرست است، چون : $n^2 \geq n \lg n$.

فصل ۲

زیر برنامه های بازگشتی

زیر برنامه بازگشتی (Recursive)، زیربرنامه ای است که حاوی حداقل یک دستور باشد که خود زیربرنامه را صدا بزنـد. ایـن زیربرنامه به تعداد مراحل محدودی اجرا می‌شود و پس از آن متوقف می‌شود.

به طور نمونه زیربرنامه بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$f(n)=\begin{cases} n\times f(n-1) & n>1 \\ 1 & n=1 \end{cases}$$

این زیربرنامه، فاکتوریل عدد n را محاسبه می کند. به طور نمونه برای محاسبه f(3) داریم:

f (3) = 3 * f (2)
f (2) = 2 * f (1)

که با جایگذاری داریم:

f (1) =1
f (2) = 2*1=2
f (3) = 3*2=6

زیر برنامه های بازگشتی معروف

۱- محاسبه n امین جمله سری فیبوناچی

$$f(n)=\begin{cases} n & n=0, n=1 \\ f(n-1)+f(n-2) & n>1 \end{cases}$$

دو جمله اول سری فیبوناچی0 و1 می باشند و جملات بعدی از جمع دو جمله قبلی محاسبه می شوند:

0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , ...

۲- مجموع اعداد 1 تا n

$$f(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ n+f(n-1) & n>1 \end{cases}$$

۳- توان (a^b)

$$f(a,b)=\begin{cases} a & b=1 \\ a*f(a,b-1) & b>1 \end{cases}$$

۴- خارج قسمت تقسیم صحیح $(a \ \ div \ \ b)$

$$f(a,b)=\begin{cases} 0 & a<b \\ f(a-b,b)+1 & a\geq b \end{cases}$$

۵- باقیمانده تقسیم صحیح $(a \mod b)$

$$f(a,b)=\begin{cases} a & a<b \\ f(a-b,b) & a\geq b \end{cases}$$

۶- ترکیب $\binom{a}{b}$

$$f(a,b)=\begin{cases} 1 & a=b \ \ or \ \ b=0 \\ f(a-1,b)+f(a-1,b-1) \end{cases}$$

۷- بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م)

$$f(a,b)=\begin{cases} b & a \geq b, a \bmod b = 0 \\ f(b,a) & a < b \\ f(b, b \bmod a) & \end{cases}$$

۸- آکرمان

$$f(a,b)=\begin{cases} b+1 & a=0 \\ f(a-1,1) & b=0 \\ f(a-1, f(a,b-1)) & a \neq 0, b \neq 0 \end{cases}$$

مثال

با توجه به تابع فیبوناچی، خروجی f (4) را بدست آورید؟

حل:

f (4) = f (3) + f (2)
f (3) = f (2) + f (1)
f (2) = f (1) + f (0)

که با جایگذاری داریم:

f (0) =0
f (1) =1
f (2) =1+0=1
f (3) =1+1=2
f (4) =2+1=3

مثال

با توجه به تابع مجموع اعداد **1** تا **n** ، مقدار f (3) چه خواهد بود؟

حل:

f (3) = 3 + f (2)
f (2) = 2 + f (1)

که با جایگذاری داریم:

f (1) =1
f (2) = 2 + 1=3
f (3) = 3 + 3=6

بنابراین f(3) برابر 6 خواهد شد.

تذکر: البته می دانیم که مجموع اعداد 1 تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ می باشد و می توان مستقیما در این رابطه به جای **n** عدد **3** را قرار داد.

مثال

با توجه به تابع توان، خروجی f (2,3) را بدست آورید؟

حل:

f (2,3) = 2*f (2,2)
f (2,2) = 2*f (2,1)

که با جایگذاری داریم:

f (2,1)=2
f (2,2)=2*2=4
f (2,3)=2*4=8

بنابراین f(2,3)=8 . در واقع تابع f(a,b) ، a را بتوان b می رساند.

مثال

با توجه به تابع خارج قسمت تقسیم صحیح ، خروجی f(5,2) را بدست آورید؟

حل:

f(5,2)=f(3,2)+1
f(3,2)=f(1,2)+1

که با جایگذاری داریم:

f(1,2)=0
f(3,2)=f(1,2)+1=0+1=1
f(5,2)=f(3,2)+1=1+1=2

در واقع تابع f(a,b) ، مقدار a div b را محاسبه می کند. (خارج قسمت تقسیم صحیح)

مثال

با توجه به تابع باقیمانده تقسیم صحیح، خروجی f(5,2) را بدست آورید؟

حل:

f(5,2)=f(3,2)
f(3,2)=f(1,2)

با جایگذاری داریم:

f(5,2)=1 و f(3,2)=1 و f(1,2)=1

■

مثال

با توجه به تابع ترکیب، مقدار f(4,2) کدام است؟

حل:

f (4,2) = f (3,2) + f (3,1)
f (3,2) = f (2,2) + f (2,1)
f (3,1) = f (2,1) + f (2,0)
f (2,1) = f (1,1) + f (1,0)

که با جایگذاری داریم:

f (2,1) =1+1=2
f (3,1) =2+1=3
f (3,2) =1+2=3
f (4,2) =3+3=6

■

عمل جمع در الگوریتم محاسبه $\binom{n}{m}$ به تعداد $\binom{n}{m}-1$ مرتبه انجام می شود.

مثال

با توجه به تابع بزگترین مقسوم علیه مشترک(ب.م.م)، حاصل f(18,4) را بدست آورید؟

حل:

چهار مرتبه تابع f برای محاسبه f (18,4) صدا زده می شود:

f (18,4) = f (4,2) = f (2,0) = f (2,0) = 2

در واقع تابع، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد 18 و 4 را که برابر 2 می باشد را محاسبه می‌کند.

■

مثال

با توجه به تابع آکرمان، مقدار f (1,1) کدام است؟

حل:

f (1,1) = f (0,f (1,0))
f (1,0) = f (0,1)

که با جایگذاری داریم:

f (0,1) =2
f (1,0)=2
f (1,1) =f (0,2)=3

■

رابطه مقابل در تابع آکرمان برقرار است: f(1,n)=n+2

مثال

با توجه به تابع آکرمان، حاصل f(1,2) کدام است؟

حل: با توجه به نکته قبل داریم : f(1,2)=4

روش دوم:

f(1,2)=f(0,f(1,1))=f(0,3)=4

■

در تابع آکرمان روابط زیر برقرار است:

$$f(1,n) = 2 + (n+3) - 3$$
$$f(2,n) = 2(n+3) - 3$$
$$f(3,n) = 2^{n+3} - 3$$
$$f(4,n) = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{n+3} - 3$$

مثال :

$$f(4,1) = 2^{2^{2^2}} - 3 \ , \ f(4,3) = 2^{65536} - 3$$

مثال

با توجه به تابع زیر، حاصل f(18) را بدست آورید؟

$$f(a) = \begin{cases} 0 & a = 1 \\ f(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor) + 1 & a > 1 \end{cases}$$

حل:

f(18)=f(9)+1
f(9)=f(4)+1
f(4)=f(2)+1
f(2)=f(1)+1

که با جایگذاری داریم:

f(2)=0+1=1 , f(4)=1+1=2 , f(9)=2+1=3 , f(18)=3+1=4

در واقع تابع داده شده ، کف لگاریتم n در پایه 2 را محاسبه می کند.($\lfloor \log_2^{18} \rfloor = 4$)

مثال

مقدار f(1,1) را با توجه به رابطه های بازگشتی زیر بدست آورید.

F(x,0)=F(x+1,0) + F(x+1,1) , if x<3
F(x,1)=2F(x+1,0) + F(x+1,1) , if x<3
F(3,0)=1
F(3,1)=0

حل:

f(1,1) = 2f(2,0) + f(2,1) = 2+2=4
f(2,0) = f(3,0) + f(3,1) = 1+0=1
f(2,1) = 2f(3,0) + f(3,1) = 2+0=2

مرتبه اجرایی توابع بازگشتی

برای پیدا کردن مرتبه اجرایی توابع بازگشتی بهتر است روش های بررسی شده در کتاب **طراحی الگوریتم ها** همین مولف را مطالعه کنید. در اینجا اشاره مختصری می کنیم.

مثال

یک رابطه بازگشتی برای تعداد ضرب ها در تابع فاکتوریل بنویسید.

```
int  fact (int n){
   if (n==0)
      return  1;
   else
      return   n*fact(n-1);
}
```

حل: برای یک n معین تعداد ضرب هایی که انجام می شود برابر است با تعداد ضرب های انجام شده در فراخوانی (n-1) به اضافه عمل ضرب n در fact(n-1) . بنابراین اگر تعداد ضرب های انجام شده برای یک مقدار معین n را با $T(n)$ نمایش دهیم، داریم:

$$T(n) = 1 + T(n-1)$$
$$T(0) = 0$$

چنین معادله ای را معادله بازگشتی می گویند. در این الگوریتم وقتی n=0 باشد هیچ ضربی صورت نمی گیرد. لذا T(0)=0 شرط اولیه است.

برای حل این معادله چند مقدار اولیه می دهیم تا به عملکرد آن پی ببریم:

$$T(1) = 1 + T(0) = 1 + 0 = 1$$
$$T(2) = 1 + T(1) = 1 + 1 = 2$$
$$T(3) = 1 + T(2) = 1 + 2 = 3$$

نتیجه می شود که: $T(n) = n$. بنابراین $T(n)$ از مرتبه $o(n)$ است.

■

مثال

بازگشتی $T(n) = T(n-2) + 1$ را با فرض $T(0) = 0$ حل کنید.(n مضربی از 2 است)

حل: چند مقدار اولیه عبارتند از:

T(2)=T(0)+1=0+1=1
T(4)=T(2)+1=1+1=2
T(6)=T(4)+1=2+1=3

نتیجه می شود که: $T(n) = \frac{n}{2}$.

■

مثال

بازگشتی $T(n) = n + T(n-1)$ را با فرض $T(1) = 1$ حل کنید.

حل:

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 2 + T(1) = 2 + 1$$

$$T(3) = 3 + T(2) = 3 + 2 + 1$$

...

$$T(n) = n + (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

تابع مجموع اعداد 1 تا n را محاسبه و از مرتبه $o(n^2)$ می باشد.

■

قضیه اصلی

می توان بعضی از معادله های بازگشتی را به کمک قضیه زیر که به نام قضیه اصلی شناخته می شود، حل کرد.

قضیه اصلی (Master)

اگر داشته باشیم: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ و با فرض $a \geq 1, b > 1$، آنگاه :

$$T(n) = \begin{cases} \theta(n^{\log_b^a}) & f(n) < n^{\log_b^a} \\ \theta(f(n).\lg n) & f(n) = n^{\log_b^a} \\ \theta(f(n)) & f(n) > n^{\log_b^a} \end{cases}$$

تذکر: رابطه بالا به صورت دقیق در کتاب طراحی الگوریتم همین مولف بررسی شده است.

مثال

مرتبه اجرایی رابطه بازگشتی $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$ کدام است؟

حل: داریم $f(n) = n, b = 3, a = 9$. پس : $n^{\log_3^9} = n^2$.

از آنجا که $f(n) < n^2$ ، با توجه به حالت اول قضیه اصلی، داریم: $T(n) = \theta(n^2)$.

■

مثال

مرتبه اجرایی رابطه بازگشتی $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$ کدام است؟

حل: داریم $f(n) = 1, b = \frac{3}{2}, a = 1$ و بنابراین داریم : $n^{\log_{3/2}^1} = n^0 = 1$.

از آنجا که $f(n) = n^{\log_b^a}$ ، با توجه به حالت دوم قضیه اصلی، داریم: $T(n) = \theta(\lg n)$.

■

مثال

مرتبه اجرایی رابطه بازگشتی $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n\lg n$ کدام است؟

حل: داریم $f(n) = n\lg n, a = 3, b = 4$ و بنابراین داریم: $n^{\log_4^3} = O(n^{0.793})$.

از آنجا که $f(n) \geq n^{\log_4^3}$ ، با توجه به حالت سوم قضیه اصلی، داریم: $T(n) = \theta(n\lg n)$. ■

بررسی چند مثال

رابطه بازگشتی	مرتبه اجرایی
$T(n)=4T(\frac{n}{2})+\lg n$	$f(n)=\lg n < n^{\log_2^4} \Rightarrow T(n)=\theta(n^2)$
$T(n)=8T(\frac{n}{9})+n\lg n$	$f(n)=n\lg n > n^{\log_9^8} \Rightarrow T(n)=\theta(n\lg n)$
$T(n)=T(\frac{2n}{3})+1$	$f(n)=1=n^{\log_{3/2}^1} \Rightarrow T(n)=\theta(\lg n)$
$T(n)=9T(\frac{n}{3})+n$	$f(n)=n < n^{\log_3^9} \Rightarrow T(n)=\theta(n^2)$
$T(n)=3T(\frac{n}{4})+n\lg n$	$f(n)=n\lg n > n^{\log_4^3} \Rightarrow T(n)=\theta(n\lg n)$
$T(n)=8T(\frac{n}{4})+5n^2$	$f(n)=5n^2 > n^{\log_4^8} \Rightarrow T(n)=\theta(n^2)$
$T(n)=2T(\frac{n}{2})+n^3$	$f(n)=n^3 > n^{\log_2^2} \Rightarrow T(n)=\theta(n^3)$
$T(n)=7T(\frac{n}{3})+n^2$	$f(n)=n^2 > n^{\log_3^7} \Rightarrow T(n)=\theta(n^2)$
$T(n)=7T(\frac{n}{2})+n^2$	$f(n)=n^2 < n^{\log_2^7} \Rightarrow T(n)=\theta(n^{\lg 7})$
$T(n)=16T(\frac{n}{4})+n^2$	$f(n)=n^2 = n^{\log_4^{16}} \Rightarrow T(n)=\theta(n^2\lg n)$

تبصره قضیه اصلی

در قضیه اصلی ، اگر $\frac{f(n)}{n^{\log_b^a}} < n^{\varepsilon}$ باشد، (یعنی $f(n)$ به صورت چند جمله ای از $n^{\log_b^a}$ بزرگتر نباشد) آنگاه نمی توان از قضیه اصلی استفاده کرد. در این حالت اگر $f(n)$ از مرتبه $n^{\log_b^a}.\lg^k n$ باشد، آنگاه مرتبه $T(n)$ برابر $n^{\log_b^a}.\lg^{k+1} n$ است.

در زیر چند مثال آورده شده است:

مرتبه اجرایی	رابطه بازگشتی
$T(n)=2T(\frac{n}{2})+n\lg n$	$\frac{n\lg n}{n}=\lg n < n^{\varepsilon} \Rightarrow T(n)=\theta(n\lg^2 n)$

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg n$	$\frac{n^2 \lg n}{n^2} = \lg n < n^{\varepsilon} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2 \lg^2 n)$
$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg^3 n$	$\frac{n^2 \lg^3 n}{n^2} = \lg^3 n < n^{\varepsilon} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2 \lg^4 n)$

کنکور ارشد

۱- فرض می گردد n و m مقادیری مثبت و بزرگتر از یک را دارا می باشند. تابع زیر چه عملی را انجام می دهـد؟ (مهندسی کامپیوتر - آزاد ۸۹)

```
int  f(int n , int m){
  if (m==2)
       return  n;
  else
       return  n*f(n,m-1);
}
```

۱) n^m ۲) n^{m-1} ۳) n^{m+1} ۴) m^n

حل: گزینه ۲ درست است.

در واقع همان تابع توان است، با این تفاوت که شرط اولیه آن تغییر کرده است.اگر شرط توقف به جای $f(2)=n$ برابر $f(1)=n$ بود، آنگاه گزینه ۴ درست بود.

راه حل کلی:

می توان از روش تکرار و جایگذاری استفاده کرد:

$$\begin{aligned} f(n,m) &= n * f(n,m-1) \\ &= n*n*f(n,m-2) \\ &= n*n*n*f(n,m-3) \\ &= .... \\ &= n*n*n*...*n*f(n,2) \\ &= n*n*n*...*n*n \\ &= n^{m-1} \end{aligned}$$

از آنجا که وقتی که m=2 می شود، به جای f(n,2) ، مقدار n را قرار می دهیم، پس تابع به تعداد m-1 مرتبه خود را فراخوانی می کند.

۲- تابع زیر چه فرمولی را محاسبه می نماید؟ (مهندسی IT – آزاد ۸۸)

```
Function  N(a,b : integer) : integer;
begin
```

```
if a<b then
    N:=a
else
    N:=N(a-b, b)
end;
```

۱) a^b ۲) a mod b ۳) a div b ۴) (a-b) div b

حل: گزینه ۲ درست است.

تابع داده شده باقیمانده تقسیم صحیح a بر b را محاسبه می کند.

۳- حاصل تابع Q(5861,7) کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۴)

$$Q(a,b)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad a<b\\ Q(a-b,b)+1 & \text{if} \quad a>=b\end{cases}$$

۱) 837 ۲) 843 ۳) 850 ۴) 858

حل: گزینه ۱ درست است.

این تابع خارج قسمت صحیح تقسیم a بر b را محاسبه می‌کند. بنابراین داریم:

5861 div 7=837

۴- پیچیدگی زمانی الگوریتم زیر از چه درجه ای است؟ (علوم کامپیوتر- دولتی ۸۹)

```
int  f (int  n, int  m){
  if (n<=1  ||  m<=1)
     return  1;
  return  n + m * f( n-1 , m/2 );}
```

۱) n ۲) logm

۳) min(n , logm) ۴) max(n , logm)

حل: جواب گزینه ۳ است.

تابع f به فرم f(n-1,m/2) خود را فراخوانی می کند. بنابراین اگر n-1 زودتر به 1 برسد، از مرتبه $O(n)$ و اگر $\frac{m}{2}$ زودتر به 1 برسد، از مرتبه $O(\log m)$ می باشد. در نتیجه تابع از مرتبه $\min(n,\log m)$ می باشد.

فصل ۳

آرایه

داده ها می توانند به روشهای متفاوتی سازماندهی شوند. مدل منطقی یا ریاضی سازماندهی داده ها به یک صورت خاص، یک ساختمان داده نامیده می شود. انواع ساختمان داده ها عبارتند از:

۱- ایستا (مانند آرایه و رکورد)

۲- نیمه ایستا (مانند صف و پشته)

۳- پویا (مانند لیست پیوندی، درخت و گراف)

ساختار ساختمان داده‌های ایستا در طول حیات آنها ثابت است ولی در نوع پویا تغییرات مجاز و نامحدود است.

عملیات رایج در ساختمان داده ها عبارتند از: اضافه کردن (insert) ، حذف داده (delete) ، جستجوی داده (search) و پیمایش.

آرایه

آرایه مجموعه‌ای از داده‌های هم نوع است که تحت یک نام معرفی شده و برای دسترسی به هر عنصر آن از اندیس مشخصی استفاده می‌شود.

مثال

در زیر نحوه تعریف آرایه های یک بعدی و دو بعدی در زبان پاسکال آورده شده است:

الف- تعریف آرایه ای یک بعدی به نام a شامل 3 عنصر(اندیسهای 2 تا 4) از نوع صحیح:

```
a : array [2..4] of  integer ;
```

ب- تعریف آرایه ای دو بعدی به نام b شامل 6 عنصر (2 سطر و3 ستون) از نوع کاراکتری:

```
b : array [1..2,4..6] of  char ;
```

مثال

در زیر نحوه تعریف آرایه های یک بعدی و دو بعدی در زبان c آورده شده است:

الف- تعریف آرایه ای یک بعدی به نام c شامل 3 عنصر(اندیس های 0 تا 2) از نوع اعشاری: float c[3];

ب- تعریف آرایه ای دو بعدی به نام d شامل 12 عنصر (3 سطر و4 ستون) از نوع صحیح: int d[3][4];

مثال

تعداد عناصر آرایه چهار بعدی A[2..5,3..8,1..3,3..4] را بدست آورید؟

حل:

$$(5-2+1)(8-3+1)(3-1+1)(4-3+1)=4\times6\times3\times2=144$$

تعداد عناصر آرایه n بعدی به شکل $A[l_1..u_1,l_2..u_2,...,l_n..u_n]$ برابر است با: $\prod_{i=1}^{n}(u_i-1_i+1)$

نحوه ذخیره عناصر آرایه در حافظه

عناصر آرایه در حافظه به صورت پشت سر هم قرار می گیرند که موجب سریع شدن سرعت دسترسی به عناصر آرایه می شود. با فرض اینکه عنصر اول آرایه در آدرس α حافظه ذخیره شود و هر عنصر آرایه به اندازه w بایت فضا اشغال نماید، محل هر عنصر آرایه در حافظه به کمک روابط زیر محاسبه می شود:

۱- آدرس عنصر A[i] **در آرایه یک بعدی** $A[l..u]$:

$$\alpha+(i-l)\times w$$

۲- آدرس عنصر A[i,j] **در آرایه دو بعدی** $A[l_1..u_1,l_2..u_2]$:

سطری : $\alpha+[(i-l_1)\times(u_2-l_2+1)+(j-l_2)]\times w$

ستونی : $\alpha+[(i-l_1)+(j-l_2)\times(u_1-l_1+1)]\times w$

۳- آدرس عنصر A[i,j,k] **در آرایه سه بعدی** $A[l_1..u_1,l_2..u_2,l_3..u_3]$:

سطری $\alpha+[(i-l_1)\times(u_2-l_2+1)\times(u_3-l_3+1)+(j-l_2)\times(u_3-l_3+1)+(k-l_3)]\times w$

ستونی $\alpha+[(i-l_1)+(j-l_2)\times(u_1-l_1+1)+(k-l_3)\times(u_1-l_1+1)\times(u_2-l_2+1)]\times w$

۴- آدرس عنصر A[i , j, k, t] **در آرایه چهار بعدی** $A[l_1..u_1, l_2..u_2, l_3..u_3, l_4..u_4]$:

(فرض : $d_i = u_i - l_i + 1$)

سطری :

$$\alpha + [(i-l_1)\times d_2 \times d_3 \times d_4 + (j-l_2)\times d_3 \times d_4 + (k-l_3)\times d_4 + (t-l_4)]\times w$$

ستونی :

$$\alpha + [(i-l_1) + (j-l_2)\times d_1 + (k-l_3)\times d_1 \times d_2 + (t-l_4)\times d_1 \times d_2 \times d_3]\times w$$

مثال

مطلوب است آدرس عنصر x[7] در حافظه؟ (عنصر اول آرایه در آدرس 1000 حافظه قرار دارد)

x : array [-2..30] of Real;

حل: متغیر از نوع real در پاسکال ، 6 بایتی است.

1000+[7-(-2)]×6=1054

■

مثال

آرایه دو بعدی x با 3 سطر و 4 ستون مفروض است. اگر خانه اول آرایه در محل 10 حافظه ذخیره شود. محل عنصر x[2,3] در حافظه کدام است؟(w=1)

x : array [1..3,1..4] of char ;

حل:

سطری : 10+ [(2-1)(4-1+1)+(3-1)]×1=16

ستونی : 10+ [(2-1)+(3-1)(3-1+1)] ×1=17

■

مثال

آرایه سه بعدی A(1..11, 2..13 ,3..14) از آدرس 100 حافظه قرار گرفته می‌باشد. آدرس عنصر A(9,7,6) چه خواهد بود؟ (w=1)

حل:

سطری : 100+ [(9-1)×(13-2+1)×(14-3+1) + (7-2)×(14-3+1)+(6-3)] ×1 =1315

ستونی : 100+ [(9-1) + (7-2)×(11-1+1) + (6-3)×(13-2+1)×(11-1+1)] ×1=559

■

مثال

آرایه چهار بعدی A[1..10,1..20,1..10,1..20] را در نظر بگیرید که به صورت سطری ذخیره شده است. اگـر آدرس شـروع آرایه صفر باشد،آدرس عنصر A[1,2,3,4] کدام است؟ (w=1)

حل:

$0+[(1-1)\times 20\times 10\times 20 + (2-1)\times 10\times 20 + (3-1)\times 20 + (4-1)]\times 1 = 243$

■

مثال

اگر آرایه ی x(-2:3 ,-4:-2 ,'A':'F', 0:3) با طول داده ای **2** و از آدرس **100** در حافظه ذخیره شـده باشـد، LOC(x[-2,-2,'D',0]) کدام است؟

$$100+[(-2+2)\times 3\times 6\times 4+(-2+4)\times 6\times 4+('D'-'A')\times 4+(0-0)]\times 2=220$$

■

جستجو در آرایه

به دو روش خطی و دودویی می توان در یک آرایه جستجو کرد.

جستجوی خطی

تابع زیر مقدار x را در آرایه n عنصری A، به روش مقایسه با تک تک عناصر آرایه، جستجو می‌نماید. در صورت پیدا کردن، اندیس خانه حاوی x و در صورت پیدا نکردن، عدد -1 را بر می گرداند.

```
int  seqsearch (int   a[ ] , int  n , int  x){
   int  i;
  a[n] = x;
  for ( i = 0 ; i < n ; i++)
    if (a[i] == x)
       return  i;
  return  -1;
}
```

میانگین تعداد عمل مقایسه در یک جستجوی موفقیت آمیز برابر $\frac{n+1}{2}$ می باشد.

در یک جستجوی ناموفق نیاز به n+1 عمل مقایسه داریم که در نتیجه زمان آن $O(n)$ خواهد بود.

جستجوی دودویی

اگر عناصر یک آرایه مرتب شده باشند، بهتر است از روش جستجوی دودویی استفاده کرد. در این روش با فرض اینکه آرایه به طور صعودی مرتب شده باشد، عنصر مورد جستجو با عنصروسط آرایه مقایسه می شود، در صورت برابر بودن، پیدا شده است و در غیر اینصورت اگر از عنصر وسط آرایه بزرگتر باشد، مقایسه به طور بازگشتی در نیمه بالایی آرایه انجام می گیرد و در صورت کوچکتر بودن از عنصر وسط، مقایسه به طور بازگشتی در نیمه پایینی آرایه انجام می شود.

تابع زیر مقدار x را در آرایه n عنصری مرتب A، به روش دودویی، جستجو می‌نماید. در صورت پیدا کردن، اندیس خانه حاوی x و در صورت پیدا نکردن، عدد -1 را بر می گرداند.(در ابتدا : low=0 , high=n-1)

```
int  bsearch( int a[ ] , int  x , int  low , int  high){
   int  mid ;
   while(low <=high)
   {
      mid = (low+high)/2;
      if (x < a[mid])
          high = mid-1;
      else
        if (x > a[mid])    low = mid+1;   else    return mid;
```

```
    }
 return  -1;
}
```

پیاده سازی بازگشتی جستجوی دودویی

```
int  bsearch (int  a[ ] , int  x , int  low , int  high){
   int  mid;
   if (low <=high){
       mid = (low+high)/2;
       if (x < a[mid])
           bsearch(a , x , low , mid-1);
       else  if (x > a[mid])
                 bsearch(a , x , mid+1 , high);
            else  return mid;
     }
   return  -1;
}
```

رابطه بازگشتی تابع بالا $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$ بوده که از مرتبه $O(\lg n)$ است.

مثال

برای پیدا کردن عدد 9 در آرایه مرتب زیر با روش جستجوی دودویی، به چند مقایسه نیاز است؟

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	**9**	12	20	**35**	50	82	88	97

حل:

ابتدا عدد 9 با عنصر وسط آرایه یعنی 35 مقایسه می شود و چون از آن کوچکتر است مقایسه به طور بازگشتی در زیر آرایه $x[1..4]$ انجام می گیرد. بنابراین مقایسه بعدی با عنصر وسط این آرایه یعنی 9 است که برابر است. بنابراین با دو مقایسه به نتیجه می رسیم.

حداکثر تعداد مقایسه‌ها برای پیدا کردن یک عنصر در آرایه مرتب n عنصری به روش جستجوی دودویی برابر $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ می باشد.

مثال

حداکثر چند عمل مقایسه برای پیدا کردن یک عدد به روش جستجوی دودویی در آرایه مرتب هزار عنصری انجام می‌گیرد؟

حل: کافی است در رابطه $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ به جای n ، عدد 1000 قرار دهیم که حاصل برابر 10 خواهد شد.

البته می‌توان به جای عدد هزار، از عدد توان دو و بزرگتر از آن یعنی 1024 استفاده کرده و از یک صرف نظر کرد.

حداکثر تعداد مقایسه ها برای پیدا کردن عنصری به روش جستجوی دودویی در یک آرایه با هزار عنصر برابر 10 ، در آرایه با ده هزار عنصر برابر 14، در آرایه با صد هزار عنصر برابر 17 و در آرایه با یک میلیون عنصر برابر 20 می باشد. بنابراین برتری جستجوی دودویی به جستجوی خطی در آرایه با تعداد عناصر زیاد بیشتر خود را نشان می دهد.

مثال

میانگین تعداد مقایسه ها برای یافتن یک عنصر دلخواه در آرایه مرتب شده با 10 عنصر با استفاده از جستجوی دودویی کدام است؟

حل: در شکل زیر تعداد مقایسه های لازم برای هر عنصر در زیر آن نوشته شده است:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
12	**20**	**26**	**30**	**45**	**65**	**68**	**70**	**75**	**92**
3	**2**	**3**	**4**	**1**	**3**	**4**	**2**	**3**	**4**

به طور نمونه برای پیدا کردن عدد 45 نیاز به یک مقایسه است، چون در وسط آرایه قرار دارد. همچنین برای پیدا کردن عدد 20 نیاز به 2 مقایسه می باشد، چون در ابتدا با مقدار 45 مقایسه شده و چون از آن کوچکتر است با وسط آرایه پایین یعنی 20 مقایسه می شود. برای محاسبه میانگین تعداد مقایسه ها کافی است مجموع این اعداد را بر تعداد آنها تقسیم کرد، یعنی:

$$\frac{29}{10}$$

روش دوم: می توان با اعداد داده شده یک درخت دودویی کامل ساخت و سپس مجموع حاصلضرب تعداد گره ها در یک سطح و سطح آن گره ها را محاسبه کرد و در نهایت حاصل را به تعداد اعداد تقسیم کرد. به طور نمونه برای آرایه 10 عنصری بالا داریم:

بنابراین داریم:

$$\frac{1\times1+2\times2+4\times3+3\times4}{10}=\frac{29}{10}$$

مثال

میانگین تعداد مقایسه ها برای پیدا کردن یک عنصر معلوم به روش جستجوی دودویی در یک آرایه 200 عنصری مرتب کدام است؟

حل: با فرض اینکه N_K ، تعداد عناصری در آرایه باشد که برای تعیین مکان آن به K مقایسه نیاز است ، داریم:

K	1	2	3	4	5	6	7	8
N_K	1	2	4	8	16	32	64	73

به طور نمونه ، 8 عنصر در آرایه 200 عنصری وجود دارد که برای پیدا کردن آنها به 4 مقایسه نیاز است.

تذکر: عدد 73 از رابطه مقابل بدست می آید:

200-(1+2+4+8+16+32+64)=73

بنابراین میانگین تعداد مقایسه ها برابر است با:

$$g(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{8}k.n_k=\frac{1.1+2.2+3.4+4.8+5.16+6.32+7.64+8.73}{200}=\frac{1353}{200}=6.765$$

مثال

میانگین تعداد مقایسه ها برای جستجوی موفق (S) و همچنین میانگین تعداد مقایسه ها در جستجوی ناموفق (U) را برای آرایه 4 عنصری مرتب زیر بدست آورید.

حل:

تعداد مقایسه ها در جستجوی موفق برای هر یک از عناصر در زیر آن آورده شده است:

5	**10**	**15**	**20**
2	1	2	3

$$S=\frac{2+1+2+3}{4}=\frac{8}{4}$$

تعداد مقایسه ها در جستجوی ناموفق برای هر 5 حالت ممکن در شکل زیر آورده شده است:

5	**10**	**15**	**20**
2 2	2	3	3

به طور نمونه برای جستجوی عدد 4 که در آرایه نیست(جستجوی ناموفق)، ابتدا مقایسه با وسط آرایه یعنی عدد 10 انجام شده و سپس با عدد 5 مقایسه انجام می شود. یعنی با 2 مقایسه متوجه می شویم که عدد 4 در آرایه نمی باشد. همچنین برای جستجوی عددی مابین 10,5 مانند عدد 7 ، با 2 مقایسه مشخص می شود که در آرایه نیست و یا برای جستجوی عددی بزرگتر از 30 ، با 3 مقایسه مشخص می شود که در آرایه نمی باشد.

بنابراین میانگین تعداد مقایسه ها در جستجوی ناموفق برابر است با:

$$U = \frac{2+2+2+3+3}{5} = \frac{12}{5}$$

بین S و U رابطه $S = (1+\frac{1}{n})U - 1$ برقرار می باشد. که می توان آن را بـه صـورت $U = (\frac{n}{n+1})(S+1)$ نیـز نوشت.

الگوریتم جستجوی سه تایی(ترنری)

در جستجوی سه تایی، آرایه باید به سه قسمت تقسیم شود. در هر تکرار نقطه $\frac{1}{3}$ که با m_1 و نقطه $\frac{2}{3}$ که با m_2 نشـان داده می شود، به صورت زیر محاسبه می گردد:

(L حد پایین و h حد بالا)

$$m_1 = L + \frac{1}{3}(h - L) = \frac{3L + h - L}{3} = \frac{h + 2L}{3}$$

$$m_2 = L + \frac{2}{3}(h - L) = \frac{3L + 2h - 2L}{3} = \frac{2h + L}{3}$$

اضافه و حذف در آرایه

تابع زیر مقدار صحیح x را در مکان k ام آرایه a با n عنصر که m عنصر آن پر است،(m<n) اضافه می‌کند:

```
insert (int  a[ ] ,int  m , int  k , int  x)
{
  for( i = m-1 ; i >= k ; i--)
     a[i+1] = a[i];
  a[k] = x;
}
```

تابع زیر k امین عنصر آرایه a را حذف کرده و آن را در متغیر x قرار می‌دهد. (k<=n)

```
delete(int  a[ ] , int  n , int  k , int  x){
   x = a[k];
  for ( i = k ; i<n ; i++ )
     a[i] = a[i+1];
  a[i] = 0;
  return(x);
}
```

تعداد شیفت مورد نیاز برای اضافه کردن (insert) در محل k ام آرایه، برابر است با: $m-k$

تعداد شیفت مورد نیاز برای حذف عنصر واقع در محل k ام آرایه، برابر است با: $m-k-1$

پیدا کردن عنصر کمینه در یک آرایه

الگوریتم زیر کوچکترین عنصر در آرایه A[1..n] را پیدا می کند و در min ذخیره می کند:

```
MINIMUM(A,n)
1   min ← −∞
2   for i ←1   to   n do
3      if   min > A[i]  then
4            min ← A[i]
```

اگر A[i] ، کوچکترین عنصر زیر آرایه A[1..i] باشد، روشن است که A[i] مقدار min را در سطر ۴ تغییر می دهد. احتمال این امر $\frac{1}{i}$ است. بنابراین میانگین تعداد دفعاتی است که سطر ۴ الگوریتم بالا اجرا می شود برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\theta(\lg n)$$

ماتریس

آرایه دو بعدی را ماتریس می گویند که انواع معروف آن عبارتند از: اسپارس،مثلثی، سه قطری، متقارن و پله ای. قبل از پرداختن به این ماتریس ها، عملیات رایج بر روی ماتریس را بررسی می نماییم.

۱- جمع دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$

```
void   add(int  a[ ] [max] ,int b[ ] [max] , int c [ ][max] , int  m , int n){
   for( i=0;  i<m ; i++)
      for( j=0;  j<n ; j++)
        c[i][j] = a[i][j] + b[i][j];
}
```

۲- ضرب دو ماتریس $A_{m\times p}$ و $B_{p\times n}$

```
void   mult(int  a[ ] [max] ,int b[ ] [max] , int c [ ][max] , int m , int  p , int  n){
   for(i=0;  i<m ; i++)
      for(j=0;  j<n ; j++)
      {
         c[i][j] =0;
         for(k=0;  k<p ; k++)
            c[i,j] = c[i][j] + a[i][k] *b[k][j] ;
   }
}
```

ماتریس c دارای ابعاد $m \times n$ است و داریم:

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{p-1} a_{ik} b_{kj} \quad 0 \le i < m \text{ و } 0 \le j < n$$

مرتبه اجرایی الگوریتم جمع دو ماتریس n*n برابر $o(n^2)$ و مرتبه ضرب آنها برابر $o(n^3)$ می باشد.

۳- ترانهاده کردن ماتریس $A_{n\times m}$

برای پیدا کردن ترانهاده یک ماتریس باید جای سطرها و ستونها را عوض کنیم.

```
for ( j=0 ; j<m ; j++)
  for( i=0 ; i<n ; i++)
       b[j][i] = a[i][j];
```

در ماتریس $A_{n\times n}$ ، عنصر A[i,j] روی قطر فرعی قرار دارد، اگر i+j = n+1 .

ضرب بهینه ماتریس ها

در ضرب چند ماتریس در یکدیگر باید ضربها به نحوی انجام شود که تعداد آنها حداقل باشد. بنابراین ابتدا دو ماتریسی را ضرب می کنیم که عدد حذف شده بزرگتر باشد.

تذکر مهم: اگر فاصله ابعاد ماتریس ها بسیار کم باشد، روش گفته شده همیشه جواب نمی دهد و از روشی که در کتاب طراحی الگوریتم اینجانب در فصل پویا توضیح داده شده، باید استفاده کرد.

در ضرب دو ماتریس $A_{m\times n}, B_{n\times k}$ به $m\times n\times k$ عمل ضرب نیاز می‌باشد.

مثال

حداقل تعداد ضرب های لازم برای ضرب ۴ ماتریس زیر کدام است؟

$$A_{30\times1}, B_{1\times40}, C_{40\times10}, D_{10\times25}$$

حل: ابتدا دو ماتریس B و C را ضرب می کنیم، چون بعد مشترک آنها یعنی 40 از همه بیشتر است:

$$A_{30\times1}\ \ (BC)_{1\times10}\ D_{10\times25}$$

سپس ماتریس بدست آمده از مرحله قبل را در ماتریس D ضرب می کنیم:

$$A_{30\times1}(BCD)_{1\times25}$$

و در نهایت ماتریس A را در ماتریس بدست آمده ضرب می کنیم:

$$(ABCD)_{30\times25}$$

تعداد ضرب ها برابر است با:

$$1\times40\times10+1\times10\times25+30\times1\times25=1400$$

تعداد حالات شرکت پذیری ضرب n+1 ماتریس برابر است با : $\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)}$

مثال

تعداد حالات شرکت پذیری ضرب 4 ماتریس چند می باشد؟

حل: با قرار دادن عدد 3 در رابطه $\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)}$ جواب برابر 5 خواهد شد. این 5 حالت به صورت زیر می باشد:

(AB)(CD) , ((A(BC))D) , (A((BC)D)) , (((AB)C)D) , (A(B(CD)))

انواع ماتریس

ماتریسهای معروف عبارتند از:

۱- اسپارس

۲- ماتریس مثلثی (پایین مثلثی و بالا مثلثی)

۳- ماتریس قطری (سه قطری ، پنج قطری و ...)

ماتریس اسپارس (خلوت)

ماتریسی که دارای تعداد نسبتا زیادی عنصر صفر باشد را ماتریس اسپارس(خلوت یا تنک)می نامند. در این ماتریس، برای کاهش حافظه مصرفی و زمان اجرا، فقط عناصر غیرصفر ماتریس ذخیره می‌شوند.

ذخیره ماتریس اسپارس به کمک آرایه دو بعدی

ماتریس اسپاس را می‌توان به صورت آرایه دو بعدی ذخیره کرد:

```
var  a : array[0..count , 1..3] of  integer;
```

count تعداد عناصر غیر صفر ماتریس اسپارس است. در خانه a[0,1] ، تعداد سطرها در a[0,2] تعداد ستونها و در a[0,3] تعداد عناصر غیر صفر ماتریس قرار می‌گیرد. در خانه‌های a[1,1] و a[1,2] و a[1,3] به ترتیب سطر و ستون و مقدار اولین عنصر غیرصفر قرار می‌گیرد و به همین ترتیب عناصر غیر صفر دیگر ذخیره می‌شود.

مثال

ذخیره ماتریس اسپارس S در ماتریس دو بعدی a :

$$S=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -6\end{pmatrix}$$

سطر اول ماتریس a ، نشان می دهد که ماتریس اسپارس دارای 3 سطر و 4 ستون و 2 عنصر غیر صفر است و سطر دوم ماتریس a نشان می دهد که در سطر 1 و ستون 3 ماتریس اسپارس مقدار 2 قرار دارد. و سطر سوم نشان می دهد که در سطر دوم و ستون دوم ماتریس اسپارس، مقدار 6- قرار دارد.

ترانهاده کردن ماتریس اسپارس

برای ترانهاده کردن یک ماتریس کافی است که سطر اول با ستون اول ، سطر دوم با ستون دوم و .... تعویض شود. برای ترانهاده کردن یک ماتریس اسپارس که به صورت آرایه دو بعدی ذخیره شده ، کافی است که محل ستون اول و ستون دوم در آرایه A را با یکدیگر جابجا کرده و سپس از سطر دوم تا سطر آخر را بطور مرتب نوشت.

مثال

ترانهاده ماتریس اسپارس s که به کمک ماتریس a نمایش داده شده را بدست آورید.

$$S=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -6\end{pmatrix}$$

حل:

در ماتریس a، محل ستون اول و دوم را با یکدیگر جابجا کرده:

4	3	2
3	1	2
2	2	-6

و سپس سطر 2 و سطر 3 را بطور مرتب می نویسیم:

4	3	2
2	2	-6
3	1	2

الگوریتم سریع ترانهاده کردن ماتریس اسپارس $m\times n$ از مرتبه $o(n+t)$ می باشد.

(t : تعداد عناصر غیر صفر)

ماتریس مثلثی

ماتریسی که تمام عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریس پایین مثلثی می گویند. ماتریسی که تمام عناصر پایین قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریس بالا مثلثی می گویند. برای ذخیره این ماتریس، فقط عناصر غیر صفر ذخیره می شوند.

مثال

ماتریس پایین مثلثی A را به ترتیب سطری در آرایه یک بعدی B ذخیره نمایید.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 5 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

حل: کافی است فقط عناصر غیر صفر ماتریس A را در آرایه یک بعدی B ذخیره نماییم:

	1	2	3	4	5	6
B	2	3	6	5	4	1

در این حالت عنصر A[i,j] در B[k] ذخیره می شود به طوری که:

$$K=\frac{i(i-1)}{2}+j$$

به طور نمونه A[2,2] در B[3] و یا A[3,2] در B[5] ذخیره می شود.

در ماتریس مثلثی، تعداد عناصر غیر صفر برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ و تعداد عناصر صفر برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد.

مثال

ماتریس پایین مثلثی A را به ترتیب ستونی در آرایه یک بعدی C ذخیره نمایید.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 5 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

حل: کافی است فقط عناصر غیر صفر ماتریس A را در آرایه یک بعدی B ذخیره نماییم:

	1	2	3	4	5	6
C	2	3	5	6	4	1

در این حالت عنصر A[i,j] در B[k] ذخیره می شود به طوری که:

$$k = i + (j-1)(n - \frac{j}{2})$$

به طور نمونه A[2,2] در B[4] و یا A[3,2] در B[5] ذخیره می شود.

به طور کلی داریم:

	سطری	ستونی
پایین مثلثی	$k = \frac{i(i-1)}{2} + j$	$k = n \times (j-1) - \frac{j(j-1)}{2} + i$
بالا مثلثی	$k = n \times (i-1) - \frac{i(i-1)}{2} + j$	$k = \frac{j(j-1)}{2} + i$

تذکر: می توان با اضافه کردن $\alpha - 1$ به فرمولهای بالا، به یک رابطه کلی رسید.

مثال

ماتریس پایین مثلثی مثال قبل را به ترتیب قطری در آرایه یک بعدی B ذخیره نمایید.(ابتدا قطر اصلی)

حل:

نحوه ذخیره به صورت زیر است:

	1	2	3	4	5	6
B	2	6	1	3	4	5

در این حالت عنصر A[i,j] در B[k] ذخیره می شود به طوری که k برابر است با:

$$[(3+2+...+(3-(i-j))]-3+i$$

این رابطه برای عناصر قطر اصلی برابر است با:

$$k=3-3+i=i$$

و برای قطر زیر قطر اصلی برابر است با:

$$k=[3+2]-3+i=2+i$$

و برای قطر آخر برابر است با:

$$k=[3+2+1]-3+i=3+i$$

این رابطه برای یک ماتریس پایین مثلثی $n\times n$ به صورت زیر می باشد:

$$[n+(n-1)+...+(n-(i-j)]-n+i$$

که می توان با اضافه کردن $\alpha-1$ به یک رابطه کلی رسید.

ماتریس سه قطری

ماتریس سه قطری یک ماتریس مربعی $n \times n$ می باشد که درایه های غیر صفر آن روی قطر اصلی و بلافاصله بالا و پائین قطر اصلی ظاهر می شوند. تعداد عناصر غیر صفر در این ماتریس برابر $3n-2$ می باشد.

مثال

ماتریس سه قطری 4×4 زیر را به صورت سطری در یک آرایه یک بعدی ذخیره نمایید.

$$\begin{bmatrix} 6 & 23 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 83 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

حل:

فقط عناصر غیر صفر ماتریس را سطر به سطر در آرایه یک بعدی ذخیره می کنیم:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	6	23	1	3	7	2	4	83	9	5

مثال

ماتریس سه قطری 5×5 زیر را به صورت ستونی در یک آرایه یک بعدی ذخیره نمایید.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{10} & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \mathbf{15} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & \mathbf{35} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & \mathbf{72} & 78 \\ 0 & 0 & 0 & 90 & \mathbf{60} \end{bmatrix}$$

حل:

فقط عناصر غیر صفر ماتریس را ستون به ستون در آرایه یک بعدی ذخیره می کنیم:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B	10	4	5	15	16	2	35	36	1	72	90	78	60

اگر عناصر غیر صفر ماتریس سه قطری A به ابعاد $n \times n$ را به صورت **سطری** در آرایه یک بعدی B ذخیره نماییم، عنصر A[i,j] در خانه $2i+j-2$ آرایه B و اگر به صورت **ستونی** ذخیره نماییم، در خانه $i+2j-2$ آرایه B قرار می گیرد.

تذکر: می توان با اضافه کردن $\alpha-1$ به یک رابطه کلی رسید.

کنکور ارشد

۱- اگر آرایه A به صورت int A[20][10][5] تعریف شده باشد (یعنی محدوده اندیس ها به صورت A[0..19][0..9][0..4] باشد). با فرض این که هر عدد int چهار بایت لازم دارد و آدرس شروع آرایه صفر باشد، آدرس عنصر A[3][4][2] را در حالت ستون محور (column major) عبارت است از:

(مهندسی IT- دولتی ۸۵)

۱) 1934 ۲) 1932 ۳) 484 ۴) 483

حل:جواب گزینه ۲ است.

$$0+[(3-0)+(4-0)\times 20+(2-0)\times 20\times 10]\times 4=1932$$

۲- آرایه int S[2][3]={2,4,6,8,10,12} را در نظر بگیرید. با فرض آنکه زبان مربوطه آرایه ها را به صورت سطری ذخیره نموده، اگر آدرس شروع آرایه 0X 0012ff80 باشد، آدرس عضو S[1][1] کدام گزینه است؟ (برای هر متغیر صحیح دو بایت اختصاص می دهد)

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۹۰)

۱) 0X 0012ff88 ۲) 0X 0012ff86

۳) 0X 0012ff0c ۴) 0X 0012ff82

(استفاده از 0X، در اول هر عدد، نشان دهنده این است که عدد در مبنای 16 است.)

حل: گزینه ۱ جواب است.

فاصله عنصر s[1][1] از شروع آرایه برابر است با:

$$[(1-0)\times 3+(1-0)]\times 2=8$$

بنابراین با اضافه کردن عدد حاصله (یعنی 8) به آدرس شروع یعنی 0012ff80 ، آدرس 0012ff88 به دست می آید.

روش دوم: آرایه داده شده به صورت زیر می باشد.

	0	1	2
0	2	4	6
1	8	10	12

بدون استفاده از فرمول نیز مشخص است که قبل از عنصر S[1][1] که طوسی رنگ شده، چهار عنصر 2 بایتی ذخیره شده است(سطری). بنابراین باید 8 بایت به آدرس شروع اضافه کرد تا آدرس این عنصر مشخص شود.

۳- دستور حذف شده در زیر برنامه جستجوی دودویی کدام است؟ (علوم کامپیوتر- دولتی ۸۰)

```
procedure binsearch (a: elementarray; x:element; var left , right , j:integer)
  var  middle :  integer;
begin
   if (left<=right) then
      begin
          middle:= (left+right) div 2;
          case compare (x,a [middle]) of
              '>' : binsearch (a,x,middle+1, right,j);
              '<': دستور حذف شده
              '=': j:=middle;
          end;
      end;
  j:=-1;
end;
```

۱) binsearch (a,x,middle+1, right,j);

۲) binsearh (a,x, middle-1, left,j);

۳) binsearch (a,x,left, middle-1, j);

۴) binsearch (a,x,left,middle,rigth);

حل: گزینه ۳ درست است. اگر عنصر مورد جستجو از عنصر وسط کوچکتر باشد، جستجو باید در نیمه اول آرایه، یعنی از left تا middle-1 ، به صورت بازگشتی انجام شود.

۴- الگوریتم زیر را برای جستجوی x در آرایه A شامل n عنصر درنظر بگیرید. پیچیدگی زمانی این الگوریتم چیست؟ (فرض کنیم در ابتدا down=1 , top =n , x ورودی باشد)

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۶)

```
int   search (int  down , int  top){
  int tmp;
  if (down > top)  return 0;
 else{
        tmp= (down+top) div 2;
         if (x== A[tmp])
             return tmp;
         else  if (x<A[tmp])
                    return  search (down,tmp-1);
```

```
        else
            return search (tmp+1,top);
    }
}
```

۱) $O(\log_{10}^{n})$ ۲) $O(n \log n)$ ۳) $O(\frac{n}{2})$ ۴) $O(\log_2 n)$

حل: جواب گزینه ۴ است. الگوریتم داده شده ، جستجوی دودویی می باشد که از مرتبه $O(\log_2 n)$ است.

۵- اگر s(n) متوسط تعداد مقایسه ها برای جستجوی موفق در یک آرایه مرتب با طول n و u(n) متوسط تعداد مقایسه ها برای جستجوی ناموفق در این آرایه با استفاده از روش جستجوی دودویی باشد. کدام یک از گزینه های زیر نادرست است؟ (مهندسی IT – دولتی ۸۳)

۱) $s(n) = \theta(u(n))$ ۲) $s(n) = u(n)$

۳) $s(n) = (1+\frac{1}{n})u(n) - 1$ ۴) موارد ۱و۳ صحیح است.

حل: جواب تست گزینه ۲ است.

گزینه ۱ و۳ درست می باشند.

$$s = (1+\frac{1}{n})u - 1 = (\frac{n+1}{n})u - 1$$

با صرف نظر از یک ها در رابطه بالا، داریم $s \approx (\frac{n}{n})u$ و در نتیجه : $s = \theta(u)$.

۶- اگر l حد پایین آرایه و h حد بالای یک آرایه باشد، در الگوریتم جستجوی ترنری(سه تایی) در هر تکرار نقطه $\frac{1}{3}$ که با m_1 و نقطه $\frac{2}{3}$ که با m_2 نشان داده می شود، به چه صورت محاسبه می گردد؟

(علوم کامپیوتر – دولتی ۹۱)

۱) $m_1 = \frac{h+2l}{3}, m_2 = \frac{h-2l}{3}$ ۲) $m_1 = \frac{h+2l}{3}, m_2 = \frac{2h+l}{3}$

۳) $m_1 = \frac{l+h}{3}, m_2 = \frac{2(h+l)}{3}$ ۴) $m_1 = \frac{l+h}{3}, m_2 = \frac{2(h-l)}{3}$

حل: گزینه ۲ درست است.

۷- برای سه ماتریس $N_1(m\times n)$، $N_2(n\times p)$ و $N_3(p\times q)$، اگر بخواهیم تعداد ضربهای $N_1\times(N_2\times N_3)$ با $(N_1\times N_2)\times N_3$ یکسان باشد، باید:

(علوم کامپیوتر- دولتی ۸۶)

۱) فقط $m=n=p=q$ باشد.

۲) $m=n$ یا $p=q$

۳) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

۴) $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$

حل: جواب گزینه ۴ است.

تعداد ضرب های $N_1\times(N_2\times N_3)$ برابر $npq+mnq$ و تعداد ضربهای $(N_1\times N_2)\times N_3$ برابر $mnp+mpq$ می باشد و داریم:

$$npq+mnq=mnp+mpq$$

با تقسیم طرفین رابطه به $mnpq$ داریم:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{n}$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$$

■

۸- فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ خلوت باشد، عناصر غیر صفر آن را به ترتیب سطری در یک آرایه $t\times 3$ ذخیره می کنیم. تابع زمان عمل ترانهاده گیری کدام است؟ (t تعداد عناصر غیر صفر ماتریس است)

(علوم کامپیوتر- دولتی ۸۰)

۱) $\theta(t+m)$ ۲) $\theta(tm)$ ۳) $\theta(tn)$ ۴) $\theta(t+n)$

حل: گزینه ۴ درست است.

مرتبه زمانی الگوریتم ترانهاده گیری از این ماتریس برابر $\theta(t+n)$ می باشد.

۹- ماتریس پایین مثلثی ماتریس مربعی است $n\times n$ که عناصر بالای قطر اصلی آن برابر صفر می باشند. اگر عناصر غیر صفر را به صورت قطری با شروع از قطر اصلی در یک آرایه یک بعدی ذخیره کنیم، فرمول ذخیره سازی loc (A[i,j]) چیست؟ (α آدرس شروع آرایه در حافظه است و e اندازه هر عنصر آرایه می باشد).

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۶)

۱) $\alpha+\left[\frac{i(i-1)}{2}+j-1\right]*e$

۲) $\alpha+[[n+(n-1)+...+(n-(i-j))]-n+(i-1)]*e$

۳) $\alpha+\left[\frac{j(j-1)}{2}+i-1\right]*e$

۴) $\alpha+\left[\frac{i}{2}+j-1\right]*e$

حل: گزینه ۲ جواب است.

به طور نمونه اگر i=2,j=1 را بررسی کنیم، تنها گزینه ۲ جواب صحیح را می دهد. $(\alpha+n\times e)$

۱۰- تعداد عناصر غیر صفر یک آرایه اسپارس سه قطری $n\times n$ چقدر است؟ (مهندسی IT – آزاد ۸۸)

۱) $3n-3$ ۲) $3n+2$ ۳) $3n-2$ ۴) $3n+3$

حل: گزینه ۳ درست است.

n عنصر در قطر اصلی و n-1 عنصر در بالای قطر اصلی و n-1 عنصر در پایین قطر اصلی.

$$n+(n-1)+(n-1)=3n-2$$

۱۱- ماتریس سه قطری، ماتریس مربعی است که در آن به جز عناصر قطر اصلی و قطر بالا و پائین آن، سایر عناصر برابر صفر می باشند. عناصر غیر صفر را به صورت سطری در یک آرایه یک بعدی ذخیره نماییم، فرمول محل ذخیره سازی چیست؟ (بفرض ابعاد ماتریس $n\times n$ باشد و آدرس شروع آرایه در حافظه α است).

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۵)

۱) $\alpha+2i+j-3$ ۲) $\alpha+2j+i-3$

۳) $\alpha+i+2j+3$ ۴) $\alpha+2i+j+3$

حل: گزینه ۱ درست است.

اگر عناصر غیر صفر یک ماتریس سه قطری را به صورت سطری در یک آرایه یک بعدی ذخیره نماییم، فرمول محل ذخیره سازی برابر $\alpha+2i+j-3$ می باشد.

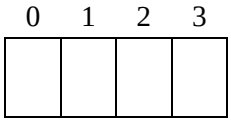
فصل ۴

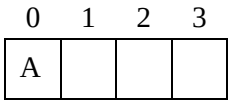
صف و پشته

صف (queue)، ساختمان داده ای است که عمل حذف از ابتدای آن و درج به انتهای آن انجام می‌شود. صف را لیست FIFO (First In First Out) می نامند، زیرا اولین عنصر وارد شده به صف، اولین عنصری است که خارج می‌شود. برای نمایش صف، از آرایه یک بعدی queue[0..n-1] و دو متغیر front و rear استفاده می‌شود. در متغیرfront یکی کمتر از مقدار محل عنصر اول صف و در متغیر rear محل آخرین عنصر صف ذخیره می شود.

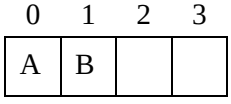
مثال

یک صف با 4 خانه که در ابتدا خالی است مفروض می‌باشد. (front = rear = -1)

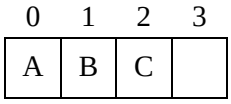




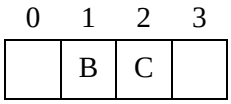
درج A



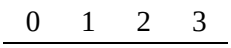
درج B

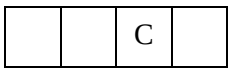


درج C



حذف A





در صف خالی مقدار front با rear برابر است و در صف پر مقدار rear برابر n-1 می باشد.

درج و حذف در صف

تابع های درج و حذف در صف در زیر آوده شده است:

اضافه کردن عنصر به صف

```
void  addq (int  *rear , int   item){
  if (*rear == max -1)
    {
      queue-full( );
      return;
    }
  queue[++*rear] = item;
}
```

(max : حداکثر اندازه صف می باشد.)

حذف عنصر از صف

```
int  deleteq (int  *front , int   rear){
  if (*front == rear)
      return queue-empty( );
  return
     q[++*front];
}
```

این نوع نمایش ترتیبی صف، دارای نقاط ابهامی است. با ورودی و خروج داده ها ، صف بتدریج بطرف راست تغییر مکان می دهد. به نحوی که rear برابر max-1 می شود و به نظر می رسد که صف پر است. در این حالت ، queue-full باید تمام صف را به سمت چپ شیفت دهد و اولین عنصر دوباره در موقعیت queue[0] قرار گرفته و front برابر 1- شود. rear نیز باید تنظیم شود. ولی شیفت عملی زمان گیر است.

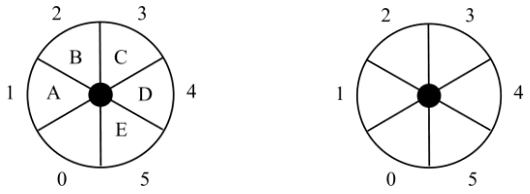
صف حلقوی

در صف ساده مشکلاتی داشتیم. اگر آرایه را حلقوی فرض کنیم، اندیس ابتدا همیشه به یک موقعیت عقب تر (در خلاف حرکت عقربه های ساعت) از اولین عنصر موجود در صف اشاره می کند. اندیس انتها(rear) به انتهای فعلی صف اشاره می کند. اگر front=rear باشد، صف خالی خواهد بود.

در یک صف حلقوی به اندازه max حداکثر max-1 عنصر می تواند، قرار گیرد. اگر از آن یک خانه نیز استفاده شود، front=rear می شود و نمی توانیم یک صف پر و خالی را از هم تشخیص دهیم.

مثال

حالتهای خالی و پر در یک صف حلقوی در زیر نمایش داده شده است:



صف پر — front = 0, rear = 5

صف خالی — front = 0, rear =0

- اگر شرط front = rear در صف حلقوی برقرار باشد، آنگاه صف حلقوی خالی است.
- اگر شرط (rear+1) mod n = front در صف حلقوی برقرار باشد، آنگاه صف حلقوی پر است.
- اگر شرط (n-front+rear) mod n = n-1 در صف حلقوی برقرار باشد، آنگاه صف حلقوی پر است.
- تعداد عناصر صف حلقوی برابر (n-front+rear) mod n است که می توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

اگر front≤rear : rear - front

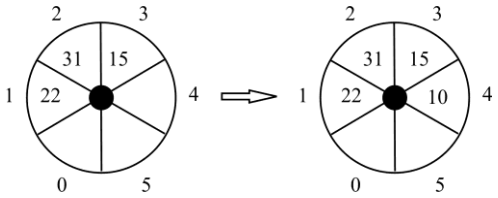
و اگر front>rear : n - (front - rear)

درج و حذف در صف حلقوی

برای اضافه کردن یک عنصر لازم است که rear در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند و اگر با front برابر شد آنگاه صف پـر است و توسط تابع full مقدار rear به مقدار قبلی برگردانده می شود و پیغام خطا چاپ می شود.

مثال

اضافه کردن عدد 10 به صف حلقوی زیر:



front = 0
rear = 3

front = 0
rear = 4

```
addq (front , *rear , item)
{
   *rear = (*rear+1) % max;
    if ( *rear == front)
        {
          queue-full(rear);
          return;
        }
   queue[*rear] = item ;
}
```

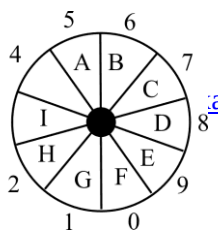
```
deleteq(*front , rear)
{
  if (*front == rear)
        return queue-empty( );
   *front=(*front+1) % max;
    return   queue[*front];
}
```

تذکر مهم: پیاده سازی توابع queue-full و queue-empty بسته به کاربردهای خاص دارد. اگر هدف ادامه پردازش باشد و سپس یک عنصر را حذف کنیم، queue-full باید اشاره گر rear را در موقعیت قبلی ذخیره کند. queue-empty بایـد یـک عنصر با یک کلید خطا که توسط برنامه اصلی آن را تست می کند، برگرداند.

مثال

یک صف حلقوی با ۱۰ خانه و4=front , 3=rear ، چه وضعیتی دارد؟

حل: صف پر است، چون مقدار n % (rear+1) برابر front است. شکل زیر مثالی از این حالت است:



پشته(STACK)

پشته ساختمان داده ای نیمه ایستا می باشد که حذف و اضافه از بالای آن انجام می‌شود. پشته را LIFO به معنی In First Last Out می‌نامند، چون آخرین عنصر وارد شده در آن، اولین عنصری است که از آن برداشته می‌شود.

ساده ترین روش پیاده سازی پشته، استفاده از یک آرایه یک بعدی به نام stack[MAX] است که MAX ، حداکثر تعداد عناصر آرایه می باشد. همچنین از یک متغیر به نام top که به عنصر بالایی پشته اشاره می کند، نیاز است. اولین یا پایین ترین عنصر پشته در stack[0] ذخیره می شود. در ابتدا به top مقدار 1- داده می شود که نشان دهنده یک پشته خالی است.

عملیات درج در پشته

```
void  push (int  item , int *top){
   if (*top >= max-1)
     {
       stack-full( );
       return;
     }
   stack[++*top] = item;
}
```

در این تابع اگر پشته پر نباشد، top را افزایش داده و item در آرایه stack اضافه می شود.

عملیات حذف از پشته

```
int  pop(int  *top){
    if (*top == -1)
        return stack-empty( );
    return  stack[(*top)--];
}
```

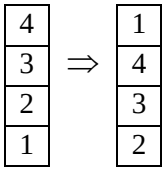
در این تابع اگر پشته خالی نباشد، عنصر بالای پشته برگردانده شده و مقدار top یک واحد کاهش می یابد.

برای معکوس کردن محتویات صف از یک پشته کمک می گیریم. ابتدا تمامی عناصر صف را حذف کرده و به پشته اضافه می کنیم، سپس تمامی عناصر پشته را حذف کرده و به صف بر می گردانیم. برای معکوس کردن ترتیب عناصر یک پشته از یک صف اضافی کمک می گیریم.

برای معکوس کردن محتویات صف از یک پشته کمک می گیریم. ابتدا تمامی عناصر صف را حذف کرده و به پشته اضافه می کنیم، سپس تمامی عناصر پشته را حذف کرده و به صف بر می گردانیم. برای معکوس کردن ترتیب عناصر یک پشته از یک صف اضافی کمک می گیریم.

مثال

اگر بخواهیم عنصر پایین پشته زیر را بر روی عناصر پشته قرار دهیم، به چند push نیاز داریم؟



پاسخ:

مراحل کار به صورت زیر است:

۱- سه عدد بالای پشته را pop کرده و در یک پشته کمکی push می کنیم.

۲- عدد 1 را pop کرده و در یک متغیر کمکی ذخیره می کنیم.

۳- سه عدد موجود در پشته کمکی را pop کرده و در پشته اصلی push می کنیم.

۴- مقدار موجود در متغیر کمکی (یعنی 1) را در پشته اصلی push می کنیم.

بنابراین به هفت عدد push نیاز است. ■

مثال

روی هم چند push وpop، برای انتقال عناصر از پشته ۱، به همان ترتیب، به پشته ۲ نیاز است؟

پاسخ:

ابتدا با n تا pop عناصر را از پشته اول برداشته و با n تا push در پشته کمکی قرار می دهیم. سپس عناصر از پشته کمکی را با n تا pop برداشته و با n تا push آنها را در پشته دوم درج می کنیم. بنابراین در کل به 4n عمل push وpop نیاز داریم.

■

تعداد خروجی های مجاز از یک پشته n تایی برابر است با : $\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)}$

مثال

در ورودی یک پشته اعداد 1 تا n به ترتیب قرار دارند(۱ در ابتدای ورودی است). عمل pop و push به صورت زیر تعریف شده اند.

Push : اولین عدد ورودی را برداشته و در بالای پشته قرار می دهد.

Pop : عدد بالای پشته را برداشته و در انتهای دنباله خروجی می نویسد.

با ترکیب مناسبی از n عدد push وn عدد pop می توان جایگشتی از اعداد 1 تا n را در خروجی تولید کرد که به آن جایگشت قابل قبول می گوییم. آیا برای n=8 ، جایگشت $< 4,3,7,8,6,2,5,1 >$ قابل قبول است؟

پاسخ: خیر- چون نمی توان 2 را قبل از 5 ، pop کرد.(5 بالای 2 در پشته قرار دارد.)

راه تشخیص سریع: برای هر عدد x ، اعداد کوچکتر از x که بعد از آن قرار دارند، باید یک دنباله نزولی باشند. در دنباله داده شده، اعداد بعد از 6 که $< 2,5,1 >$ هستند، یک دنباله نزولی نمی باشند.

مثال

در صورتی که اعداد ۱و۲و۳ به ترتیب از راست به چپ وارد یک پشته شوند، چند حالت خروجی می تواند ایجاد شود؟

حل: با قرار دادن n=3 در رابطه $\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)}$ جواب برابر 5 خواهد شد.

این پنج حالت به صورت زیر می باشد:

123 (ابتدا ۱ را در پشته قرار داده و سپس آن را خارج کرده و همین کار را برای ۲و۳ نیز انجام می دهیم.)

132 (ابتدا ۱ را در پشته قرار داده و سپس آن را بر می داریم. بعد عدد ۲ و۳ را در پشته قرار داده و سپس هر دو را خارج می کنیم.)

213 (عدد ۱و۲ را در پشته قرار داده و سپس هر دو را خارج کرده و ۳ را در پشته قرار داده و خارج می کنیم.)

231 (عدد ۱و۲ را در پشته قرار داده ، عدد ۲ را خارج کرده و عدد ۳ را قرار داده و عدد ۳و۱ را خارج می کنیم.)

321 (عدد ۱و۲و۳ را وارد کرده و سپس هر سه عدد را خارج می کنیم.)

تذکر: توجه کنید که خروجی 312 ممکن نمی باشد. چون ابتدا 1 و2و3را در پشته قرار داده و سپس 3 را خارج کرده و بعد از آن نمی توان 1 را خارج کرد چون قبل از آن باید عدد 2 را خارج کرد.

کاربردهای پشته

از کاربردهای پشته می توان موارد زیر را نام برد:

۱- ارزشیابی عبارات

۲- زیر برنامه های بازگشتی

۳- نگهداری آدرس برگشت زیر برنامه ها

ارزشیابی عبارات

یکی از کاربردهای پشته، ارزشیابی عبارات می باشد. یک عبارت از عملوندها و عملگرها ساخته شده که می‌تواند به سه شکل نمایش داده شود:

۱) prefix (پیشوندی) ۲) infix (میانوندی) ۳) postfix (پسوندی)

در فرم infix، عملگرها بین عملوندها قرار می‌گیرند. در فرم postfix، عملگرها بعد از عملوندها قرار می‌گیرند و در فرم prefix، عملگرها قبل از عملوندها قرار می‌گیرند. به طور نمونه عبارت A*B/C میانوندی، عبارت AB*C/ پسوندی و عبارت /*ABC پیشوندی می باشد.

تبدیل فرم ها به یکدیگر

حالتهای ممکن تبدیل فرم به صورت زیر می باشد:

۱- infix به postfix
۲- infix به prefix
۳- postfix به infix
۴- prefix به infix
۵- postfix به prefix
۶- prefix به postfix

تبدیل از فرم infix به postfix

ابتدا عبارت را بر حسب اولویت عملگرهایش در نظر گرفته و سپس هر عملگر را بعد از عملوندهایش می‌نویسیم. به طور نمونه عبارت A+B را به صورت AB+ نمایش می دهیم.

مثال

عبارت میانوندی A/B-C+D*E را به فرم پسوندی تبدیل کنید.(اولویت: / ، * ، - ، و +)

A/B–C+D*E

AB/ - C + D*E تقسیم :

AB/ - C + **DE*** ضرب :

AB/C- + **DE*** منها :

AB/C-DE*+ جمع :

تذکر: تقسیم و ضرب دارای اولویت یکسانی می باشند و هر کدام که از چپ به راست، زودتر استفاده شود، تقدم بیشتری خواهد داشت.(برای جمع و تفریق هم چنین است)

مثال

عبارت ((A+B)*D)^(E-F) را به فرم پسوندی تبدیل کنید.

پاسخ:

(**AB+** *D) ^ (E-F)
⇒ **AB+D*** ^ (E-F)
⇒ **AB+D*^ EF-**
⇒ **AB+D*EF-^**

■

تبدیل از فرم infix به prefix

در این تبدیل عملگرها را با توجه به اولویت آنها به سمت چپ منتقل می کنیم. به طور نمونه عبارت میانوندی A+B را به فرم AB+ نمایش می دهیم.

مثال

عبارت x+y*z-w را به فرم پیشوندی تبدیل نمایید.

x+ ***yz** -w ⇒ **+x*yz** - w ⇒ **-+x*yzw**

مثال

عبارت a+(b-c*d)^e-f^g^(h/ **i*k)** را به فرم پیشوندی و پسوندی تبدیل نمایید.

پاسخ: عملگر توان سمت راست،زودتر اجرا می شود.

-+a^-b*cde^f^g*/hik و abcd*-e^+fghi/k*^^-

■

تبدیل از فرم postfix به infix

این تبدیل به کمک پشته و یا روش استفاده شده در مثال زیر قابل انجام می باشد.

مثال

تبدیل عبارت پسوندی ABC*+ به فرم میانوندی :

A**B*C**+ ⇒ **A+B*C**

■

مثال

حاصل عبارت محاسباتی 14,6,1+,/,8,3,9,-,*,- کدام است؟

پاسخ:

14 , **6 , 1 ,** + , / , 8 , 3 , 9 , - , * , -
14 , 7 , / , 8 , 3 , 9 , - , * , -
2 , 8 , **3 , 9 ,** - , * ,-
2 , **8 , -6 , *** , -
2 , -48 , -

50

مثال

اگر Postfix عبارتی، AB/C-DE*+AC*- باشد، چند جفت پرانتز در عبارت infix آن قرار دهیم تا postfix آن به صورت، ABC-D+/EA-*C* شود؟

پاسخ: حاصل infix عبارت داده شده برابر A/B-C+D*E-A*C است که با قرار دادن ۲ پرانتز به صورت A/(B-C+D)*(E-A)*C در می آید. postfix آن به صورت ABC-D+/EA-*C* است.

تبدیل از فرم prefix به infix

این تبدیل را نیز می توان به کمک پشته و یا روش استفاده شده در مثال زیر انجام داد.

مثال

عبارت prefix زیر را به infix تبدیل کنید؟

+ –* ↑ ABCD / E / F + GH

پاسخ:

+ - * **A^B** CD/E/F +GH
+ - * **A^B** CD/E/F **G+H**
+- **A^B*C** D/E/F **G+H**
+-**A^B*C** D/E **F/(G+H)**
+-**A^B*C** D **E/(F/(G+H))**
+ **A^B*C-D** **E/(F/(G+H))**
A^B*C-D + E/(F/(G+H))

مثال

عبارت پیشوندی -+x*yzw به فرم میانوندی تبدیل نمایید.(به کمک پشته)

*	y*z		
x	x		
+	+	x + (y*z)	
-	-	-	(((x+y*z)) – w)

پاسخ:

برای تبدیل به کمک پشته، عملگرهای عبارت را از چپ به راست در پشته قرار داده تا به دو عملوند برسیم . در این حالت عملگر بالای پشته را بر روی آنها اعمال کرده و نتیجه را در پشته قرار می‌دهیم. اگر بعد از عملوندی، یک عملگر بود آن را در پشته قرار می‌دهیم. اگر در حالتی در بالای پشته دو عبارت قرار داشت که قبل از آنها عملگری بود، ابتدا عملگر را بر روی آن دو عبارت اعمال کرده و سپس ورودی‌های بعدی را پردازش می‌کنیم.

تبدیل از فرم Postfix به Prefix

برای این تبدیل ابتدا عبارت postfix را به infix تبدیل کرده و سپس حاصل را به prefix تبدیل می‌کنیم. البته می توان مستقیما نیز این تبدیل را انجام داد.

مثال

عبارت پسوندی ABC ^/D*E+ را به فرم پیشوندی تبدیل نمایید.

پاسخ: ابتدا عبارت را به فرم میانوندی تبدیل می‌کنیم:

ABC ^/D*E+ ⇒ A**B^C**/D*E+ ⇒ **A/B^C** D*E+ ⇒ **A/B^C* D**E+ ⇒ **A/B^C* D+E**

حال عبارت میانوندی حاصل را به فرم پیشوندی تبدیل می‌کنیم:

A/B^C*D+E ⇒ A/^**BC***D+E ⇒ **/A^BC***D+E ⇒ ***/A^BCD**+E ⇒ **+*/A^BCDE**

■

مثال

معادل پیشوندی عبارت AB/C*D+ چیست؟ (بدون تبدیل به عبارت میانوندی)

پاسخ: می توان عبارت پسوندی را مستقیما به عبارت پیشوندی تبدیل کرد. یعنی عملگر بعد از عملوندها را به قبل از آنها برد.

به طور نمونه عبارت AB/ را به فرم /AB نمایش داد.

AB/C*D+ ⇒ **/AB** C*D+ D+ ***/ABC** ⇒ ⇒ **+*/ABCD**

■

تبدیل از فرم Prefix به Postfix

ابتدا عبارت prefix را به infix تبدیل کرده و سپس عبارت میانوندی حاصل را به Postfix تبدیل می‌کنیم.

مثال

عبارت پیشوندی /*+ABC-DE به فرم پسوندی تبدیل نمایید.

پاسخ: ابتدا عبارت را به فرم میانوندی تبدیل می‌کنیم:

/*+ABC-DE ⇒ /***(A+B)**C-DE ⇒ **/((A+B)*C)**–DE
⇒ **/((A+B)*C)(D-E)** ⇒ **((A+B)*C)/(D-E)**

حال عبارت میانوندی حاصل را به فرم پسوندی تبدیل می‌کنیم:

((A+B)*C) / (D-E) E) -*C) / (D**AB+**(⇒
⇒ **AB+C*** / (D-E) ⇒ **AB+C*** / **DE-** **/-AB+C*DE** ⇒

■

مثال

عبارت پیشوندی - +*/ABCD ^/EF-GH را به فرم پسوندی تبدیل نمایید.

پاسخ: می توان مستقیما و بدون استفاده از فرم میانوندی، این تبدیل را انجام داد. کافی است عملگر قبل از عملوندها را به بعد از آنها برد. به طور نمونه عبارت AB/ را به فرم /AB نمایش داد.

- + */ABCD^/EF-GH ⇒ - + ***AB**/CD^/EF-GH ⇒ - + **AB/C***D^/EF-GH ⇒

$\Rightarrow$ - **AB/C*D+** ^/EF-GH $\Rightarrow$ - **AB/C*D+** ^**EF/**-GH $\Rightarrow$ - **AB/C*D+** ^**EF/** **GH-** $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ - **AB/C*D+** **EF/GH-**^ $\Rightarrow$ **AB/C*D+EF/GH-^-**

■

الگوریتم تبدیل عبارت infix به postfix توسط پشته

عبارت داده شده میانوندی را Q و عبارت حاصل در فرم پسوندی را P در نظر می گیریم. ابتدا یک پرانتز باز در پشته push کرده و یک پرانتز بسته به انتهای عبارت Q اضافه می کنیم و عبارت Q را از چپ به راست پیمایش کرده و عملیات زیر را انجام می دهیم:

۱- با برخورد به عملوند، آن را به عبارت P اضافه می کنیم.

۲- با برخورد به پرانتز باز، آن را در پشته push می نماییم.

۳- با برخورد به عملگر، آن را در پشته push می نماییم. البته اگر به عملگری برسیم که اولویت عملگر بالای پشته از این عملگر بیشتر یا مساوی بود، ابتدا عملگر بالای پشته را pop کرده و به P اضافه می کنیم و سپس عملگر مورد نظر را در پشته push می نماییم.

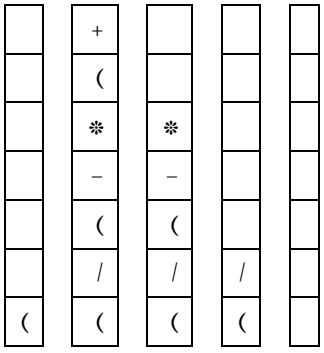
۴- با برخورد به پرانتز بسته، عملگرهای بالای پشته را تا رسیدن به یک پرانتز باز، pop کرده و به P اضافه می نماییم و پرانتز باز داخل پشته را حذف می نماییم.

۵- در نهایت با برخورد به پرانتزی که در ابتدا به انتهای Q اضافه کرده بودیم، عملگر و پرانتز موجود در پشته را pop کرده و عملیات پایان می یابد.(پشته خالی است)

مثال

عبارت میانوندی (A / (B-C* (D+E)) را به کمک پشته به معادل پسوندی تبدیل نمایید.

پاسخ: ابتدا یک پرانتز باز در پشته push کرده و یک پرانتز بسته به آخر عبارت میاوندی اضافه می کنیم و طبق الگوریتم بالا عملیات را انجام می دهیم:



مقدار عبارت P در هر یک از حالت ها در زیر نشان داده شده است:

P = ABCDE
P = ABCDE+
P = ABCDE+*-
P = ABCDE+*-/

■

الگوریتم محاسبه یک عبارت به فرم Postfix توسط پشته

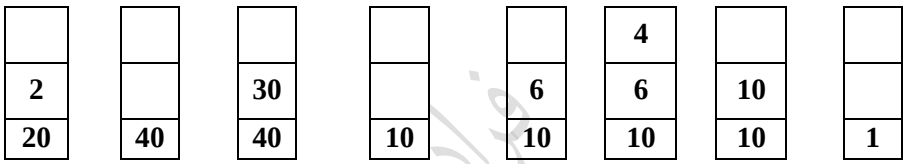
برای محاسبه یک عبارت که به فرم postfix داده شده، ابتدا یک پرانتز بسته نگهبان در انتهای عبارت اضافه می کنیم و به کمک پشته ارزیابی را انجام می دهیم. هنگامی که به پرانتز بسته در عبارت برسیم، نتیجه نهایی در پشته موجود است.

مثال

حاصل عبارت 20,2,*,30,-,6,4,+,/ را بدست آورید.(به کمک پشته)

پاسخ:

در ابتدا یک پرانتز بسته به انتهای عبارت داده شده اضافه می کنیم. سپس مقدار 20 و 2 را در پشته push کرده و با رسیدن به عملگر ضرب، آن دو را از پشته pop کرده و نتیجه اعمال ضرب بر روی آنها ، یعنی 40 را در پشته ، push می کنیم و عملیات را به همین نحوه ادامه داده تا به پرانتز بسته در انتهای عبارت برسیم. در این حالت نتیجه در پشته خواهد بود.



در نهایت با 8 عدد push و 8 عدد pop به نتیجه نهایی رسیدیم. (البته push نتیجه نهایی در پشته را در نظر نگرفتیم.)

تعداد pop ها برای تبدیل یک عبارت postfix به فرم infix ، دو برابر تعداد عملگرها می باشد.

تعداد push ها برای تبدیل یک عبارت postfix به فرم infix ، دو برابر تعداد عملگرها می باشد.

کاربرد پشته در زیر برنامه های بازگشتی

توابع بازگشتی قبلا بررسی شد. در این قسمت نحوه استفاده توابع بازگشتی از پشته را نشان می دهیم.

مثال

خروجی زیر برنامه زیر، به ازای فراخوانی f (1) چیست؟

```
f (int  x){
```

```
 if (x==3)  exit( );
 else{
        x=x+1;
        f(x);
        cout<<x;
        cout<< 'a';
  }}
```

پاسخ: ترتیب فراخوانی ها به صورت f(1) => f(2) => f(3) بوده و از آنجا که دستورات بعد از فراخوانی بازگشتی (دستورات چاپ در این مثال)، در پشته قرار می گیرند داریم:

cout<<3
cout<<'a'
cout<<2
cout<<'a'

بنابراین خروجی برابر 3a2a خواهد بود. ■

مثال

خروجی زیر برنامه زیر، به ازای فراخوانی f (1,4,7) چیست؟

```
f ( int  x , int  y , int  z ){
   if  (x==3)  exit( );
   else{
        x++;  y++;  z++;
        f (x,y,z);
        cout<< x;
       cout<< y;
       cout<< z;
      }
}
```

پاسخ: ترتیب فراخوانی ها به صورت مقابل است: f (1,4,7) => f (2,5,8) => f (3,6,9)

دستورات بعد از فراخوانی بازگشتی (دستورات چاپ در این مثال)، در پشته قرار می گیرند:

cout<< 3
cout<< 6
cout<< 9
cout<< 2
cout<< 5
cout<<8

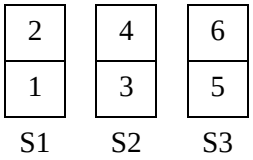
بنابراین خروجی برابر 369258 خواهد بود.

■

کنکور ارشد

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۰)

۱- سه پشته S_1 و S_2 و S_3 هر یک حاوی دو عدد بشکل زیر می باشند.



دو عملگر PopPush(i, j) و Pop(i) بصورت زیر تعریف شده اند.

PopPush(i, j) : یک قلم از پشته S_i حذف و به پشته S_j اضافه می کند.

Pop(i) : یک قلم از پشته S_i حذف و سپس آن را چاپ می کند.

برای چاپ اعداد 1 تا 6 بصورت 6, 4, 2, 5, 3, 1 ، عملگر PopPush بایستی حداقل چند بار مورد استفاده قرار گیرد؟

۱) 3 ۲) 5 ۳) 6 ۴) 4

حل: گزینه ۴ درست است. عملیات لازم عبارتند از:

1- PopPush(1,3)
2- Pop(1)
3- PopPush(2,1)
4- Pop(2)
5- PopPush(3,1)
6- PopPush(3,2)
7- Pop(3)
8- Pop(1)
9- Pop(1)
10- Pop(2)

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۹۰)

۲- تعداد دنباله های مجاز خروجی با k ورودی از یک پشته (stack) برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ ۲) $\frac{1}{k}\binom{2k}{k}$ ۳) $2k+1$ ۴) $\frac{1}{k-1}\binom{2k}{k}$

حل: جواب گزینه ۱ است.

(مهندسی کامپیوتر- دولتی ۷۸)

۳- بر روی پشته s اعمال زیر قابل انجام است. اگر n عمل از اعمال فوق به ترتیب دلخواه، بر روی پشته s که در ابتدای تهی است انجام شود، مجموع هزینه این n عمل در بدترین حالت کدام است؟

Push(s,x) : درج x در بالای پشته با هزینه $o(1)$.

Pop(s,x) : حذف عنصر بالای پشته با هزینه $o(1)$.

Multipop(s,k) : حذف k عنصر بالای پشته با هزینه $o(k)$.

(k حداکثر برابر تعداد عناصر موجود پشته است).

۱) $o(n.\log n)$ ۲) $o(n^2)$ ۳) $o(nk)$ ۴) $o(n)$

حل: جواب گزینه ۴ است. چون هر عنصر به طور دقیق یکبار درج و مستقل از نحوه حذف شدنش توسط pop یا multipop ، حداکثر یکبار حذف می شود، به ازای هر عنصر، ۲ واحد هزینه پرداخت می شود. در نتیجه، در مجموع هزینه کل اعمال حداکثر برابر 2n خواهد بود.

(علوم کامپیوتر- دولتی ۸۰)

۴- عبارت psotfix معادل عبارت $(A+B)*D+E/(F+A*D)$ برابر است با:.....

۱) $AB+D*E+F/A+D*$ ۲) $AB+D*EFAD*+/+$

۳) $ABDEFAD+*+/+*$ ۴) $AB+DE+FAD*+/$

حل: جواب گزینه ۲ است.

(A+B)*D+E/(F+A*D)
⇒AB+*D+E/(F+A*D)
⇒AB+*D+E/ FAD*+
⇒ AB+D*+E/ FAD*+
⇒AB+D* + EFAD*+/
⇒AB+D*EFAD*+/+

(مهندسی IT – دولتی ۸۶)

۵- معادل infix عبارت prefix روبرو چیست؟

/*A-B/*C-+DEFG-HI

۱) A*B-C*D+E-F/G/H-I ۲) ((C+E-F)*C/G-B)*A/H-I

۳) A*(B-C*(D+E-F)/G)/(H-I) ۴) A*(B/(((C*(D+E))-F-G))/(H-I)

حل: گزینه۳ درست است.

/*A-B/*C-+DEFG-HI
/*A-B/*C-(D+E)FG(H-I)
/*A-B/*C((D+E)-F)G(H-I)
/*A-B/(C*((D+E)-F))G(H-I)

/*A-B((C*((D+E)-F))/G)(H-I)
/*A(B-((C*((D+E)-F))/G)(H-I)
/A* ((B-((C*((D+E)-F))/G))(H-I)
(A* ((B-((C*((D+E)-F))/G))) / (H-I)

روش سریع: قبل از DE عملگر+ قرار دارد و به (D+E) تبدیل می شود که تنها در گزینه ۴ این عبارت وجود دارد.

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۶)

۶- مقدار ارزیابی عبارت پسوندی +3 $ 2 *+/2 8 3 – + 3 2 6 چیست؟($: توان)

۱) 50 ۲) 52 ۳) 48 ۴) 54

حل: جواب گزینه ۲ است.

6 2 3 + - 3 8 2 / + * 2 $ 3 +
⇒ 6 5 - 3 4 + * 2 $ 3 +
⇒ 1 7 * 2 $ 3 +
⇒ 7 2 $ 3 +
⇒ 49 3 +
⇒ 52

(مهندسی کامپیوتر- دولتی ۸۲)

۷- با توجه به دو تابع زیر، خروجی f1(4) چیست؟

```
void  f1(int  x){
   if (x)
       f2(x–1);
   printf(x);
 }
void  f2(int  y){
  if (y) {
      printf(y + 1);
      f1(y – 1);
    }
}
```

۱) 44220 ۲) 20244 ۳) 42204 ۴) 42024

حل: گزینه ۴ درست است.

نحوه فراخوانی‌ها به صورت زیر است:

$$f1(4) \Rightarrow f2(3) \Rightarrow f1(2) \Rightarrow f2(1) \Rightarrow f1(0)$$

در ابتدا با صدازدن f1(4)، تابع f2 با مقدار 3 فراخوانی شده و دستور بعد از فراخوانی یعنی printf(4) در پشته ذخیره می‌شود. سپس در f2 ابتدا مقدار 4 چاپ شده و تابع f1 با مقدار 2 صدا زده می‌شود. در f1، ابتدا تابع f2 با مقدار یک صدا زده شده و سپس دستور printf(2) در پشته ذخیره می‌شود. در این حالت f2 ابتدا مقدار 2 را چاپ کرده و سپس f1 را با مقدار صفر صدا می‌زند. در f1 چون شرط if برقرار نیست، مقدار صفر توسط دستور printf چاپ می‌شود و اجرای برنامه پایان می‌یابد و مقادیر موجود در پشته چاپ می‌شوند.

فصل ۵

لیست پیوندی

لیست پیوندی، ساختمان داده ای پویا است که اشیاء با یک ترتیب خطی در آن قرار گرفته اند. بـر خـلاف آرایـه ، کـه در آن ترتیب خطی توسط اندیسهای آرایه تعیین می شود، ترتیب در لیست پیوندی بوسیله یک اشاره گر در هر شـیء تعیـین مـی گردد. لیست پیوندی بر دو نوع یک طرفه و دو طرفه می باشد.

لیست پیوندی یک طرفه(یک سویه)

لیستی که در آن، هر عنصر فقط آدرس عنصر بعدی را نگهداری می کند. هر یک از گرههای این لیست پیوندی از دو قسمت داده و آدرس تشکیل شده که در زبان c به صورت زیر تعریف می شود:

```
typedef   struct   list-node   *list-pointer;
typedef   struct   list-node{
            int              data;
            list-pointer     next;
  };
```

در next، آدرس گره بعدی ذخیره می شود. (به جای next از link نیز استفاده می شود)

یادآوری: تعریف ساختار یک گره لیست پیوندی یک طرفه در زبان پاسکال:

```
type  pointer=^ node;
node = record
   data  : char;
   next  : ^ pointer;
end;
```

تذکر: برای دسترسی به فیلد داده گره اول لیست پیوندی در زبان پاسکال از دستور first^.data و در زبان c از دستور first ->data استفاده می کنیم.

- درج و حذف در لیست پیوندی نسبت به آرایه ساده تر است. چون نیاز به جابجایی فیزیکی عناصر در حافظه نمی باشد.
- دسترسی به عناصر آرایه نسبت به لیست پیوندی سریع تر است، چون اندیس هر عنصر در آرایه مشخص است.
- امکان جستجوی دودویی در لیست پیوندی وجود ندارد.
- در زبان پاسکال برای تخصیص حافظه پویا از دستور new استفاده می شود و برای آزاد سازی فضا از دستور dispose استفاده می شود. معادل این دستورات در زبان c عبارتند از malloc وfree .

الگوریتم های کار بر روی لیست پیوندی یکطرفه

درج یک گره

تابع زیر یک گره با داده d بعد از یک گره با آدرس مشخص n درج می کند:

```
void   insert ( list-pointer  *first , list-pointer  n){
   list-pointer   t;
   t = malloc(sizeof(list-node));
   t – >data = d;
   if (*first) {
         tnext; – >next = n  – >
         n – >  next = t;
      }
  else{
        t  – >next = NULL:
        *first = t;
       }
}
```

اگر لیست تهی باشد، گره اضافه شده، تنها گره لیست خواهد بود.

تذکر: قبل از **p** ، از ستاره استفاده نشده است چون این آدرس تغییری نمی کند.

حذف یک گره

تابع delete **گره واقع در قبل از گره با آدرس مشخص** n **را حذف می کند.**(t : آدرس گره قبل از گره n)

```
void   delete( list-pointer  *first , n , t )
{
 if (t)
      t  – >  next = n – >next;
 else
     *first = (*first)  – >next;
 free(n);}
```

تذکر: اگر t برابر NULL باشد، آنگاه n اولین گره لیست می باشد.

چاپ داده های لیست

تابع زیر داده های یک لیست با آدرس شروع p را چاپ می کند.

```
void  print-list (list-pointer   *p)
{
```

```
  for( ; p ;  p = p->next )
      cout <<  p->data;
}
```

اتصال دو لیست پیوندی به یکدیگر

تابع زیر لیست p2 را به انتهای لیست p1 متصل می کند:

```
list-pointer   concatenate (list-pointer  p1 , p2)
{
   list-pointer   t;
   if  (p1==NULL)  return  p2;
   else{
         if (p2 !=NULL)
         {
           for(t = p1 ; t->next ; t = t->next);
           t->next = p2;
         }
     return  p1;
  }
}
```

اگر شرط p1=NULL برقرار باشد، یعنی لیست p1 موجود نیست و نتیجه همان p2 است و در صورت موجود بودن لیست p2 ، لیست p1 را توسط حلقه تا آخر پیمایش کرده و سپس p2 را به انتهای آن توسط دستور t->next=p2; ، اضافه می‌کنیم.

الگوریتم اتصال دو لیست xو y (x به انتهای y و یا y بـه انتهـای x)، از مرتبـه $O(max(m,n))$ می‌باشـد، زیـرا در بدترین حالت لیست بزرگتر باید تا انتها پیمایش شود. (mوn طول لیست ها می باشند)

حذف عناصر تکراری در یک لیست (با شبه کد CLRS)

الگوریتم زیر عناصر تکراری در یک لیست را طوری حذف می کند که ترتیب عناصر باقی مانده تغییر نکند. مثلا لیست $<1,2,3,2,1,3,4>$ به $<1,2,3,4>$ تبدیل می شود.

```
PurgeList(L)
1   p ← First(L)
2   while  p< > null
3      do  q ←p
4          while  next[q] < > null
5             do  if  element[p]=element[next[q]]
6                    then   delete-after(L,q)
7                    else   q← next[q]
8          p ← next[p]
```

تذکر: در الگوریتم بالا، تابع **delete-after(L,q)** ، عنصر بعد از **q** را در لیست **L** حذف می کند. منظور از **next** همان **next** است.

الگوریتم بالا از مرتبه $O(n^2)$ است. می توان لیست را مرتب کرد و سپس با $O(n)$ کار اضافی، عناصر تکراری را در لیست مرتب حذف کرد. اما لیست نهایی این الگوریتم که عناصرش مرتب هستند، با لیستی که الگوریتم فوق تولید می کند، متفاوت است.

وارون کردن یک لیست پیوندی

می توان یک لیست n عضوی را تنها با تغییر اشاره گرهای آن وارون کرد، به طوری که عنصر i ام لیست بعد از وارون سازی عنصر n-i+1 ام لیست جدید شود. این کار را به صورت بازگشتی و غیر بازگشتی می توان انجام داد.

الف- روش غیر بازگشتی

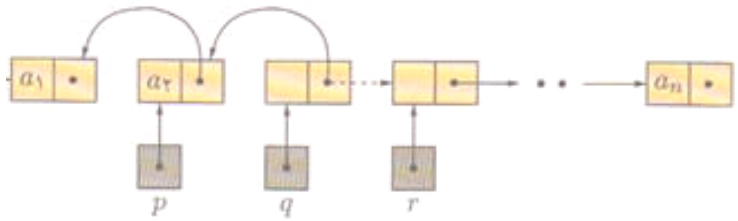
در روش غیر بازگشتی از سه اشاره گر p ، q و r استفاده می کنیم،که به سه عنصر متوالی اشاره می کنند. در زمان اجرا p وq به اولین و دومین عنصر لیستی که تا این مرحله وارون شده اشاره می کنند و r به عنصر بعدی در لیست که هنوز وارون نشده است. ابتدا p تهی است و q به عنصر اول و r به عنصر دوم لیست اشاره می کنند. در هر مرحله، مولفه next عنصر r را به عنصر q تغییر داده و هر سه اشاره گر را به جلو می بریم. با تهی شدن r ، لیست معکوس شده است. این کار در زمان خطی انجام می شود.

تذکر: الگوریتم زیر با توجه به شبه کد CLRS می باشد. منظور از next[k] همان دستور $k->next$ در زبان c می باشد.

reverse(L)

```
1  if  size(L) ≤ 1
2     then  return first[L]
3  p ← null
4  q ←First(L)
5  r  ←next[q]
6  while  r ≠ null
7     do  next[q] ← p
8          p  ← q
9          q r ←
10         r  ←  next[r]
11 next[q] ← p
12 return   q
```

تذکر: رویه معکوس کردن لیست(بازگشتی یا غیر بازگشتی) از مرتبه $O(n)$ است.



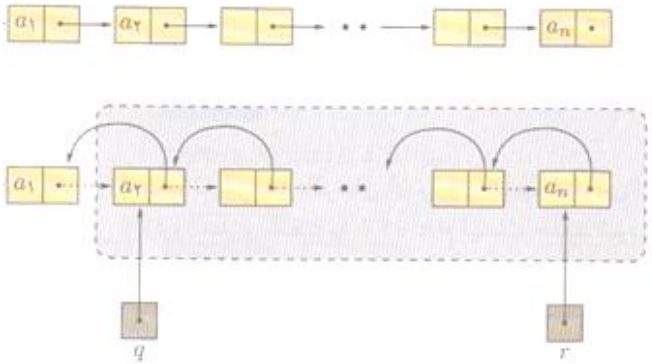
ب- روش بازگشتی

رویه بازگشتی reverse(L,p) ، زیر لیست شامل عناصر p به بعد را در لیست L ،وراون شده بر می گرداند. برای وارون کل لیست، p باید برابر first[L] باشد. با فرض اینکه تعداد عناصر از p به بعد در لیست L برابر n باشد،الگوریتم ابتدا عنصر p را کتار می گذارد و بقیه لیست با n-1 عنصر که با q شروع می شود را به صورت بازگشتی وارون می کند و از همان عناصر یک لیست r ایجاد می کند. در نهایت،عنصر p را به انتهای لیست r وصل می کند.

reverse(L,p)

```
1  if  p=null  or  next[p]=null
2     then  return  p
3  q ← next[p]
3  r  ← reverse(L,q)
4  next[q] ←p
5  next[p] ←null
```

```
6  return  r
```



مثال

الگوریتم زیر، لیست L را وارون می کند. اگر در دستور if ، قسمت دوم شرط or نباشد، آنگاه خروجی چه خواهد بود؟

```
reverse(L)
1  if  L=null  or  next[L]=null
2     then  return  L
3  else  r ← reverse(next[L])
4        next[next[L]] ←  L
5        next[L] ← null
6  return  r
```

پاسخ: آنگاه return اول همیشه مقدار null بر می گرداند و چون این مقدار در r ذخیره شده و دوباره برگردانده می شود، بنابراین خروجی همواره null خواهد بود.

پیاده‌سازی پشته با لیست پیوندی

می توان پشته را با لیست پیوندی پیاده سازی کرد. درج و حذف هر عنصر فقط در ابتدای لیست انجام می شود و محدودیتی برای تعداد عناصر پشته نداریم.

اضافه کردن به پشته پیوندی

اضافه کردن یک گره به پشته پیوندی، مشابه اضافه کردن یک گره به اول لیست پیوندی است.آدرس شروع پشته پیوندی برابر top می باشد:

```
void  add(stack-pointer  *top , int   a){
  stack-pointer  p;
  p = malloc(sizeof(stack) );
  p – > item =a;
  p – > next = *top;
```

```
  *top = p;
}
```

حذف از پشته پیوندی

حذف یک گره از پشته پیوندی مشابه حذف اولین گره لیست پیوندی می باشد:

```
int  delete(stack-pointer  *top ){
   stack-pointer  t;
   int  a;
    t =*top;
   if  (t ==NULL)  exit ( );
   else{
         a = t  – >  item;
          *top = t  – >  next;
         free(t);
         return  a;
       }
}
```

پیادسازی پشته با لیست پیوندی یکطرفه(توسط شبه کد CLRS)

Push(S,x)	Pop(S)
1 n ← Allocate-Node( )	1 if IsEmpty(S)
2 element[n] ← x	2 then error STACK IS EMPTY
3 next[n] ← top[s]	3 n ← top[S]
4 top[S] ← n	4 temp ← element[top[s]]
5 size[s] ← size[s]+1	5 top[s] ← next[top[s]]
	6 size[s] ← size[s]-1
	7 Free-Object(n)
	8 return temp

پیاده‌سازی صف با لیست پیوندی

برای پیاده سازی صف Q می توان از یک لیست پیوندی یک طرفه با دو اشاره گر front[Q] (اشاره گر به عنصر اول لیست) و rear[Q] (اشاره گر به عنصر آخر لیست) استفاده کرد. عمل EnQueue یک عنصر به انتهای لیست درج می کند. و عمل DeQueue عنصر اول لیست را حذف می کند و در اختیار قرار می دهد.

EnQueue (Q,x)	**DeQueue(Q,x)**
1 next[rear[Q]] ← Allocate-Node(x,null) 2 rear[Q] ← next[rear[Q]] 3 size[Q] ← size[Q]+1	1 if IsEmpty(Q) 2 then error Queue IS EMPTY 3 n ← front[Q] 4 front[Q] ← next[front[Q]] 5 temp ← element[n] 6 Free-Node(n) 7 size[Q] ← size[Q]-1 8 **return** temp

پیادسازی صف با لیست پیوندی یکطرفه (توسط دستورات زبان C)

اولین گره لیست، عنصر ابتدای صف می‌باشد. در واقع صف پیوندی لیستی است که اضافه به انتهای آن و حذف از ابتدای آن انجام می گیرد.

```
addq(*front , *rear, a)
{
  t = malloc(sizeof(queue));
  t -> item = a;
  t ->next = NULL;
  if (*front)
       (*rear) ->next = t;
  else
       *front = t;
  *rear = t;
}
```

```
int deleteq(queue-pointer *front)
{
 int a;
 queue-pointer t;
 t = *front;
 if ((*front) == NULL) exit( );
 a = t -> item;
 *front = t->next;
  free(t);
  return a;
}
```

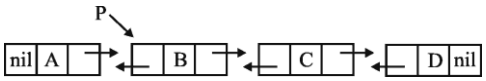
لیست پیوندی دوطرفه

در لیستهای پیوندی دو طرفه(دو گانه یا دو سویه)، هر عنصر علاوه بر مولفه های لیست یک طرفه، مولفه prev هم دارد که به عنصر قبلی اش در لیست اشاره می کند.

تذکر: به جای Prev از Llink و به جای next از Rlink نیز استفاده می شود.

با استفاده از این اشاره‌گرها امکان حرکت به هر دو طرف وجود دارد و بنابراین با داشتن آدرس یک گره، به کلیه گره‌های لیست می‌توان دسترسی پیدا کرد.

شکل زیر یک لیست دو طرفه با چهار گره را نشان می دهد:



تعریف یک نود لیست دو طرفه در زبان c :

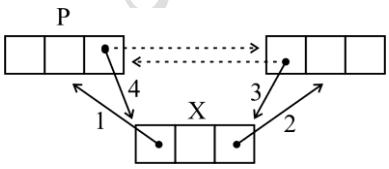
```
typedef  struct  node  *node-pointer;
typedef  struct  node{
     int        data;      node-pointer  next;      node-pointer  prev;
};
```

اضافه کردن گره

اضافه کردن گره x به سمت راست گره با آدرس مشخص p

```
void  insert(node-pointer  p , node-pointer x){
   x –> prev = p;              (1)
   x –> next = p –>next;       (2)
   p –> next –>prev = x;       (3)
   p –> next = x;              (4)
}
```

مراحل کار:



تذکر: می توان ۸ حالت مجاز برای ترتیب شماره ها در نظر گرفت:

1234 , 2134 , 2314 , 2341 , 1324 , 3124 , 3214 , 3241

باید ابتدا خط ۲و۳ تنظیم شوند و سپس خط ۴.

حذف گره

تابع زیر گره با آدرس مشخص p را از لیست پیوندی دو طرفه حذف می کند. برای این کار کافی است اشاره گر next گره قبل از p ، به گره بعد از p اشاره کند و اشاره گر prev گره بعد از p ، به گره قبل از p اشاره کند.

```
delete(node-pointer  p)
{
   p –>prev –>next = p –>next;
   p –>next –>prev = p –>prev;
```

```
   free(p);
}
```

تذکر: دو دستور زیر معادل هستند. اولی به زبان c و دومی شبه کد:

```
1) p->prev->next = p->next;
2) next[prev[p]] ← next[p]
```

- برای حذف یک گره از یک لیست پیوندی دو طرفه به ۲ تغییر اشاره گر نیاز است.
- برای اضافه کردن یک گره به یک لیست پیوندی دو طرفه به ۴ تغییر اشاره گر نیاز است.
- از مزایای لیست پیوندی دوطرفه نسبت به یک طرفه، می توان ساده شدن عملیات زیر را نام برد:

۱ـ حذف یک گره با معلوم بودن مکان آن گره.

۲ـ اضافه کردن یک گره قبل از گره‌ای با مکان معلوم.

کپی گرفتن از لیست

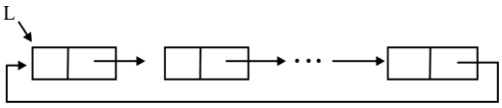
الگوریتم copy از لیست پیوندی دو طرفه first کپی گرفته و لیست پیوندی دو طرفه P را ایجاد می کند:

```
copy (first)
1  if (first = null)
2     p ←null;
3  else   p←allocatenode (element[first], null , null );
4          next[p] ← copy (next[first]);
5         if (next[first] !=null)    prev[next[p]] ← p;
6  return  p;
```

لیست پیوندی حلقوی

لیست حلقوی(چرخشی)، نوعی لیست یک طرفه است که در آن اشاره‌گر آخرین گره، به جای مقدار دهی با NULL به ابتدای لیست اشاره می‌کند.

شکل زیر یک لیست حلقوی یک طرفه را نشان می دهد:



محاسبه طول یک لیست حلقوی

```
int  length (list  *p){
    int   c=0;
    list-pointer  *t;
    if (p) {
        t = p;
        do{
            c++;
            t = t->next;
        } while(t != p);
     }
  return  c;
}
```

درج در ابتدای یک لیست حلقوی(p : آدرس گره آخر)

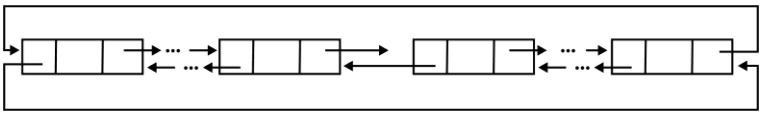
```
void   insert (list-pointer  *p , *n){
   if (*p==NULL){
        *p = n;
        n->next = n;
    }
  else{
         n-> next = (*p) -> next;
         (*p) -> next = n;
    }
}
```

مزیت لیست یکطرفه چرخشی نسبت به لیست یکطرفه غیرچرخشی در این است که به راحتی می توان به گره قبلی رفت.

در لیست چرخشی با داشتن آدرس هر گره می‌توان به کلیه گره‌ها دسترسی داشت.

لیست دو طرفه چرخشی

نوعی لیست دو طرفه است که در آن اشاره‌گر راست آخرین گره به ابتدای لیست و اشاره گر چپ اولین گره به انتهای لیست اشاره می‌کند. به عبارتی next آخرین گره به گره اول و Prev اولین گره به گره آخر اشاره می‌کند. شکل زیر یک لیست چرخشی دو طرفه را نشان می دهد:



حذف گره x از یک لیست پیوندی دو طرفه چرخشی L با گره head:

```
if  (x==L)  Halt;
x->prev->next = x->next;
x->next->prev = x->prev;
free(x);
```

اضافه کردن گره p بعد از گره x در یک لیست پیوندی دو طرفه چرخشی:

```
p->prev = x;
p->next = x->next;
x->next ->prev= p;
x->next = p;
```

تذکر: اگر آخرین خط یعنی x->next=p; را در ابتدا اجرا کنیم، آن گاه دیگر به گره های واقع در سمت راست گره x در لیست اولیه، دسترسی نخواهیم داشت و به آنها زباله (Garbage) می گوییم.

مثال

یک لیست پیوندی یک طرفه بزرگ داریم. می خواهیم بررسی کنیم که آیا آخرین اشاره گر این لیست تهی است یا این که به یکی دیگر از عناصر لیست اشاره می کند. با فرض اینکه تعداد عناصر لیست n باشد و فقط به عنصر اول لیست دسترسی داشته باشیم، الگوریتم تشخیص این موضوع چگونه کار می کند؟

پاسخ:

دو اشاره گر p و q در نظر گرفته که سرعت حرکت p دو برابر q باشد. یعنی به ازای هر دو گام اشاره گر next ای که p می رود، q تنها یک واحد به جلو می رود. دو حالت رخ می دهد:

الف : اگر p به null برسد، پس انتهای لیست null است و زمان اجرای این کار $O(n)$ می باشد.

ب : اگر q به انتهای لیست برسد، p ناگزیر در آن حلقه قرار دارد. چون طول حلقه حداکثر n است، حداکثر پس از n مرحله ، p و q به هم می رسند. در این حالت نیز زمان اجرا از $O(n)$ می باشد.

مسئله ی ژوزفوس

ژوزفوس یکی از ۴۱ یهودی ای بود که به وسیله ی رومیان در یک غار محاصره شده بودند. به جای تسلیم، این گروه تصمیم گرفتند که همگی به این صورت خودکشی کنند: آن ها قرار گذاشتند تا با شروع از نفر اول و به صورت حلقوی، هر بار نفر دوم زنده ها خود را بکشد و نوبت به نفر زنده ی بعدی برسد، تا این که هیچکس باقی نماند. ولی ژوزفوس زرنگ تر از آنها بود و مکان نشستن آخرین فردی را که قاعدتا باید خود را به تنهایی می کشت محاسبه کرد و از ابتدا در آن مکان نشست و جان سالم در برد.

مسئله در حالت کلی: اگر n نفر با شماره های 1 تا n دور دایره ای قرار بگیرند و با شروع از شماره ی 1 و در جهت ساعت گرد، هر بار دومین نفر زنده خودش را بکشد، آخرین نفر چه شماره ای دارد؟

مثال

ترتیب خودکشی برای n=5 :

$\underline{1}, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow 1, \underline{3}, 4, 5 \Rightarrow 1, 3, \underline{5} \Rightarrow \underline{3}, 5 \Rightarrow 3$

ترتیب خودکشی برای n=6 :

$\underline{1}, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow 1, \underline{3}, 4, 5, 6 \Rightarrow 1, 3, \underline{5}, 6 \Rightarrow \underline{1}, 3, 5 \Rightarrow 1, \underline{5} \Rightarrow 5$

رابطه بازگشتی مسئله ژوزفوس

اگر تعداد افراد اولیه **زوج** باشند، فردی که در دور دوم در مکان x قرار گرفته، ابتدا در مکان $2x-1$ بوده است. به طور نمونه اگر تعداد افراد اولیه 10 باشد، در دور دوم فردی که در مکان سوم قرار دارد، در ابتدا در مکان پنجم بوده است و یا فردی که در مکان چهارم قرار دارد، در ابتدا در مکان هفتم بوده است:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \Rightarrow 1, 3, 5, 7, 9$

به طور نمونه اگر تعداد افراد اولیه 13 باشد، در دور دوم فردی که در مکان سوم قرار دارد، در ابتدا در مکان پنجم بوده است:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \Rightarrow 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$

با چنین تحلیلی به رابطه بازگشتی زیر می رسیم:

$$f(1)=1$$
$$f(2n)=2f(n)-1 \qquad n\geq 1$$
$$f(2n+1)=2f(n)+1 \qquad n\geq 1$$

جواب این رابطه بازگشتی برابر است با : $2(n-k)+1$

که k بزرگترین عدد توان 2 کوچکتر از n می باشد. (یعنی $k=2^{\lfloor \log n \rfloor}$)

تذکر: اگر n توانی از 2 باشد، جواب این رابطه برابر 1 می باشد.

مثال

برای n=10 فرد با چه شماره ای زنده می ماند؟

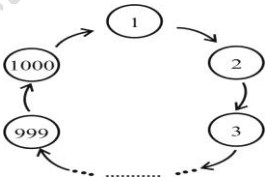
پاسخ: اگر در رابطه $2(n-k)+1$ به ازای n مقدار 10 و به ازای k مقدار 8 (بزرگترین عدد توان دو کوچکتر از 10) را قرار دهیم جواب 5 خواهد شد.

روش دوم: عدد 10 را یکبار به چپ شیفت دوراني دهیم($1010 \Rightarrow \mathbf{1}0101$) نیز به عدد 5 می رسیم.

مثال

با فرض اجرای تابع بر روی لیست پیوندی حلقوی شکل زیر، مقدار خروجی چقدر است؟

(اشاره گر در ابتدا بر روی گره با داده 1 می باشد.)




```
int  f (List  *L){
  if (L->next == L)
       return  L-> data;
  L-> next = L -> next-> next;  (*)
  return  f (L->next);
}
```

پاسخ: با هر بار اجرای دستور ستاره دار، یک گره از لیست حذف می شود. در هر بار اجرا اشاره گر یک گره به جلو می رود و تابع آنقدر اجرا می شود تا یک گره در لیست باقی بماند. در واقع این همان مسئله ژوزفوس است. با قرار دادن 1000 به جای n و 512 (بزرگترین عدد توان دو کوچکتر از 1000) به جای k در رابطه $2(n-k)+1$ ، مقدار 977 حاصل می شود.

روش دوم:

عدد 1000 را به صورت یک عدد دودویی نشان داده و سپس آن را به چپ شیفت دورانی داد:

11111101000	1000
1111010001	977

تذکر: می توان برای محاسبه f(n) ، m و t را چنان انتخاب کرد که $n=2^m+t$ و $0\leq t\leq 2^m$. آنگاه $f(n)=2t+1$.

مثال

مقدار f(1000) را محاسبه کنید.

پاسخ: مقدار m را برابر 9 و مقدار t را برابر 488 در نظر می گیریم. $1000 = 2^9 + 488$. بنابراین :

$$f(1000) = 2 \times 488 + 1 = 977$$

الگوریتم مسئله ژوزفوس

```
JoesePhous(n)
1   create(L)
2   first[L] ← q ← Allocate-node(1, null )
3   p ← q
4   for i ←2 to n
5     do next[p]Node( i , next[p] )-Allocate ←
6           p ← next[p]
7   next[p]n ← q; size[L] ←
8   p ←first(L)
9   while next[p] ≠ p
10    do Delete-After(L,p)
11        p ← next[p]
12  print element[p]
```

مسئله ی ژوزفوس در حالت کلی

در مسئله ژوزفوس اگر هر بار k امین نفر زنده خودکشی کند، خواهیم داشت:

$$f(n,k) = ((f(n-1,k)+k-1) \mod n)+1$$
$$f(1,k) = 1$$

که در حالت k=2 خواهیم داشت:

$$f(n) = ((f(n-1)+1) \mod n)+1$$

مثال

مقدار f(4) را با فرض k=2 مشخص کنید.

$$f(4) = ((f(3)+1) \mod 4)+1 = 4 \mod 4+1 = 0+1 = 1$$
$$f(3) = ((f(2)+1) \mod 3)+1 = 2 \mod 3+1 = 2+1 = 3$$
$$f(2) = ((f(1)+1) \mod 2)+1 = 2 \mod 2+1 = 0+1 = 1$$

بررسی چند نمونه در حالت K=2 :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f(n)	**1**	**1**	3	**1**	3	5	7	**1**	3	5	7	9	11	13	15	**1**

مثال

مقدار f(4) را با فرض k=3 مشخص کنید.

اگر در رابطه k را برابر 3 قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$f(n) = ((f(n-1)+2) \mod n)+1$$
$$f(4) = ((f(3)+2) \mod 4)+1 = 4 \mod 4+1 = 0+1 = 1$$
$$f(3) = ((f(2)+2) \mod 3)+1 = 4 \mod 3+1 = 1+1 = 2$$
$$f(2) = ((f(1)+2) \mod 2)+1 = 3 \mod 2+1 = 1+1 = 2$$

ترتیب خودکشی ها به صورت: $1,2,3,4 \Rightarrow 1,2,4 \Rightarrow 1,4 \Rightarrow 1$

تذکر: اگر موقعیت ها از 0 تا n-1 باشد، خواهیم داشت:

$$f(n,k) = (f(n-1,k)+k) \mod n \qquad f(1,k) = 0$$

کنکور ارشد

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۵)

۱- فرض کنید $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ دو لیست پیوندی خطی ساده باشند. مرتبه زمانی الگوریتمی که دو لیست را در لیست z ترکیب می‌کند، چیست؟

$$Z=\begin{cases}(x_1,y_1,x_2,\cdots x_m,y_m,x_{m+1},\cdots,x_n) & ,\ if\ \ m\le n\\ (x_1,y_1,x_2,\cdots x_n,y_n,x_{n+1},\cdots,x_m) & ,\ if\ \ m>n\end{cases}$$

۱) $O(\max(m,n))$ ۲) $O(m+n)$ ۳) $O(mn)$ ۴) $O(\min(m,n))$

پاسخ: جواب گزینه ۴ است.

با توجه به شرایط داده شده، دو لیست را به صورت یک درمیان ادغام کرده تا لیست کوچکتر تمام شود. سپس بقیه لیست بزرگتر را به انتهای لیست بدست آمده، اضافه می کنیم. بنابراین همواره به اندازه لیست کوچکتر، عمل پیمایش انجام می شود. بنابراین برای دو لیست به طول های n و m ، مرتبه الگوریتم برابر است با : $O(\min(m,n))$

(مهندسی IT – دولتی ۸۳)

۲- فرض کنید بخواهیم ترتیب اشاره گرها را در یک لیست تک پیوندی وارون نمائیم. به عبارت دیگر، هر اشاره گر به جای اشاره به عنصر بعدی به عنصر قبلی اشاره نماید. برای انجام این کار کدام یک از گزاره های ذیل درست است؟ (الگوریتم غیر بازگشتی)

۱) ۳ اشاره گر به جز نام لیست مورد نیاز است.

۲) ۲ اشاره گر به جز نام لیست مورد نیاز است.

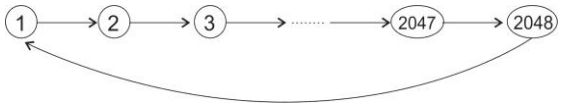
۳) اشاره گر دیگری غیر از نام لیست، مورد نیاز نیست.

۴) کافی است از یک استک استفاده کنیم، لذا اشاره گر بالای استک و نام لیست، مورد نیاز است.

حل: جواب گزینه ۳ است.برای معکوس کردن یک لیست یکطرفه به ۳ اشاره گر نیاز است.

(مهندسی کامپیوتر- دولتی ۷۶)

۳- با وجود بودن لیست پیوندی حلقوی به شکل زیر، خروجی قطعه کد داده شده چیست؟




```
while   p^.next < > p   do
 begin
       p^.next := p^.next^.next;
       p:=p^.next;
 end;
write(p^.data);
```

۱) 2047 ۲) 1 ۳) 2048 ۴) 1024

پاسخ : جواب گزینه ۲ است.

همان مسئله ژوزفوس است و چون n توانی از دو می باشد، جواب 1 است.

روش دوم: عدد 2048 را به صورت یک عدد دودویی نشان داده و سپس آن را به چپ شیفت دورانی داده که عدد 1 حاصل می شود:

$$\mathbf{1}00000000000 \Rightarrow 000000000001$$

روش سوم: می توان از رابطه $2(n-2^{\lfloor \log n \rfloor})+1$ نیز استفاده کرد. خروجی تابع به ازای n=2048 برابر 1 خواهد بود.(لگاریتم 2048 در پایه 2 برابر 11 می باشد.)

منتخبی از عناوین آموزشی منتشر شده بر روی فرادرس

برنامه‌نویسی	
عنوان آموزش	مدت زمان تقریبی
مبانی برنامه نویسی - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
برنامه نویسی C - کلیک کنید (+)	۱۳ ساعت
آموزش برنامه نویسیC++	۲۰ ساعت
برنامه نویسی کاربردی سی شارپ - کلیک کنید (+)	۱۴ ساعت
آموزش جامع شی گرایی در سی شارپ - کلیک کنید (+)	۱۴ ساعت
برنامه نویسی جاوا - کلیک کنید (+)	۲۳ ساعت
آموزش برنامه نویسی - PHP کلیک کنید (+)	۲۸ ساعت
آموزش فریمورک PHP کدایگنایتر - (CodeIgniter) کلیک کنید (+)	۷ ساعت
آموزش اسکریپت برنامه نویسی - jQuery کلیک کنید (+)	۷ ساعت
آموزش ویژوال بیسیک دات نت - (Visual Basic.NET) کلیک کنید (+)	۱۳ ساعت
آموزش تکمیلی ویژوال بیسیک دات نت - (Visual Basic.NET) کلیک کنید (+)	۱۶ ساعت
آموزش برنامه نویسی با روش سه لایه به زبان - VB.Net کلیک کنید (+)	۴ ساعت
برنامه نویسی اسمال بیسیک یا - Small Basic کلیک کنید (+)	۱۶ ساعت
آموزش ساخت بازی ساده در ویژوال بیسیک - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش کاربردی - SQL Server کلیک کنید (+)	۱۱ ساعت
آموزش آشنایی با LINQ to SQL در - C# کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش برنامه نویسی با روش سه لایه به زبان سی شارپ - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
آموزش برنامه نویسی تحت شبکه با سی شارپ در قالب پروژه - کلیک کنید (+)	۱ ساعت
آموزش Cryptography در دات نت - کلیک کنید (+)	۳ ساعت

برنامه‌نویسی (ادامه از صفحه قبل)	
عنوان آموزش	مدت زمان تقریبی
آموزش قفل نرم افزاری در سی شارپ از طریق رجیستری	۴ ساعت
آموزش ساخت اپلیکیشن کتاب و کار با داده‌ها در اندروید - کلیک کنید (+)	۱۳ ساعت
آموزش ارتباط با دیتابیس سمت سرور در اندروید - کلیک کنید (+)	۱۴ ساعت
آموزش ساخت روبات و کنترل آن با اندروید - کلیک کنید (+)	۱۶ ساعت
آموزش ساخت اپلیکیشن دیکشنری صوتی دو زبانه با قابلیت تشخیص صوت کاربر - کلیک کنید (+)	۷ ساعت
آموزش مدیریت بانک اطلاعاتی اوراکل - کلیک کنید (+)	۹ ساعت
آموزش مدیریت بانک اطلاعاتی اوراکل پیشرفته - کلیک کنید (+)	۷ ساعت
آموزش راه اندازی اوراکل ۱۲ cدر لینوکس	۱ ساعت
آموزش دیتاگارد در اوراکل - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
برنامه نویسی متلب - کلیک کنید (+)	۹ ساعت
متلب برای علوم و مهندسی - کلیک کنید (+)	۱۴ ساعت
برنامه نویسی متلب پیشرفته - کلیک کنید (+)	۷ ساعت
طراحی رابط های گرافیکی (GUI) در متلب - کلیک کنید (+)	۸ ساعت
آموزش برنامه نویسی R و نرم‌افزار - RStudioکلیک کنید (+)	۷ ساعت
آموزش تکمیلی برنامه نویسی R و نرم‌افزار - RStudio کلیک کنید(+)	۵ ساعت
آموزش برنامه نویسی پایتون ۱ - کلیک کنید (+)	۲۰ ساعت
آموزش برنامه نویسی پایتون ۲ - کلیک کنید (+)	۵ ساعت
آموزش گرافیک کامپیوتری با - OpenGL کلیک کنید(+)	۱۶ ساعت

راه اندازی و مدیریت وبسایت‌ها و سرورها	
عنوان فرادرس	**مدت زمان تقریبی**
آموزش برنامه نویسی - PHP کلیک کنید (+)	۲۸ ساعت
آموزش فریمورک PHP کدایگنایتر - (CodeIgniter) کلیک کنید (+)	۷ ساعت
آموزش طراحی وب با - HTML کلیک کنید (+)	۳ ساعت
آموزش طراحی وب با - CSS کلیک کنید (+)	۵ ساعت
آموزش پروژه محور HTML و - CSS کلیک کنید - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
آموزش جاوا اسکریپت - (JavaScript) کلیک کنید (+)	۹ ساعت
آموزش کار با - cPanel کلیک کنید (+)	۱ ساعت
آموزش مدیریت هاست با - DirectAdmin کلیک کنید - کلیک کنید (+)	۱ ساعت
راه اندازی سایت و کار با وردپرس - کلیک کنید (+)	۷ ساعت
راه اندازی فروشگاه دیجیتال با وردپرس و - Easy Digital Downloads کلیک کنید (+)	۱ ساعت
آموزش راه اندازی سایت شخصی با وردپرس - کلیک کنید (+)	۱ ساعت
آموزش ترجمه قالب وردپرس - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش راه اندازی سایت خبری با وردپرس - کلیک کنید (+)	۲ ساعت

علوم کامپیوتر	
عنوان آموزش	مدت زمان تقریبی
ساختمان داده‌ها -کلیک کنید (+)	۱۰ ساعت
آموزش ساختمان داده‌ها (مرور – تست کنکور ارشد) - کلیک کنید (+)	۲۰ ساعت
آموزش نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها -کلیک کنید (+)	۹ ساعت
آموزش نظریه زبان‌ها و ماشین (مرور – تست کنکور ارشد) - کلیک کنید (+)	۸ ساعت
آموزش سیستم های عامل - کلیک کنید (+)	۱۱ ساعت
آموزش سیستم عامل (مرور اجمالی و تست کنکور) - کلیک کنید (+)	۱۲ ساعت
آموزش پایگاه داده‌ها -کلیک کنید (+)	۸ ساعت
آموزش پایگاه داده‌ها (مرور – تست کنکور ارشد) - کلیک کنید (+)	۵ ساعت
آموزش طراحی و پیاده سازی زبان های برنامه سازی - کلیک کنید (+)	۱۰ ساعت
آموزش طراحی و پیاده سازی زبان های برنامه سازی (مرور – تست کنکور ارشد) - کلیک کنید (+)	۱۲ ساعت
آموزش روش های حل روابط بازگشتی - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
آموزش روش تقسیم و حل در طراحی الگوریتم - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش ذخیره و بازیابی اطلاعات - کلیک کنید (+)	۸ ساعت
آموزش ساختمان گسسته با رویکرد حل مساله - کلیک کنید (+)	۱۶ ساعت
آموزش جامع مدارهای منطقی - کلیک کنید (+)	۱۰ ساعت
آموزش معماری کامپیوتر با رویکرد حل مسأله - کلیک کنید (+)	۲۰ ساعت
آموزش ساختمان گسسته (مرور و حل تست های کنکور کارشناسی ارشد) - کلیک کنید (+)	۱۲ ساعت
آموزش طراحی الگوریتم - کلیک کنید (+)	۸ ساعت
آموزش شبکه های کامپیوتری ۱ - کلیک کنید (+)	۱۹ ساعت

علوم کامپیوتر (ادامه از صفحه قبل)	
عنوان آموزش	مدت زمان تقریبی
آموزش نظریه گراف و کاربردها - کلیک کنید (+)	۱۴ ساعت
آموزش نتورک پلاس - (Network+) کلیک کنید (+)	۱۰ ساعت
آموزش مدل سازی UML با نرم‌افزار - Rational Roseکلیک کنید (+)	۳ ساعت
آموزش پردازش ویدئو - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
پردازش تصویر در متلب - کلیک کنید (+)	۱۶ ساعت
آموزش پردازش تصویر با - OpenCV کلیک کنید (+)	۱۰ ساعت

هوش مصنوعی	
عنوان آموزش	مدت زمان تقریبی
الگوریتم ژنتیک در متلب - کلیک کنید (+)	۱۴ ساعت
الگوریتم PSO در متلب - کلیک کنید (+)	۱۰ ساعت
الگوریتم ازدحام ذرات (PSO) گسسته باینری - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
ترکیب الگوریتم ژنتیک و PSO در متلب - کلیک کنید (+)	۱ ساعت
حل مسأله فروشنده دوره گرد با استفاده از الگوریتم ژنتیک - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
الگوریتم مورچگان در متلب - کلیک کنید (+)	۶ ساعت
الگوریتم رقابت استعماری در متلب - کلیک کنید (+)	۱۳ ساعت
طراحی سیستم های فازی عصبی یا ANFIS با استفاده از الگوریتم های فرا ابتکاری و تکاملی - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
الگوریتم فرهنگی یا Cultural Algorithm در متلب - کلیک کنید (+)	۲ ساعت

هوش مصنوعی (ادامه از صفحه قبل)	
عنوان آموزش	مدت زمان تقریبی
شبیه سازی تبرید یا Simulated Annealing در متلب - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
جستجوی ممنوع یا Tabu Search در متلب - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
الگوریتم کرم شب تاب یا Firefly Algorithm در متلب - کلیک کنید (+)	۱ ساعت
بهینه سازی مبتنی بر جغرافیای زیستی یا BBO در متلب - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
جستجوی هارمونی یا Harmony Search در متلب - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
کلونی زنبور مصنوعی یا Artificial Bee Colony در متلب - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
الگوریتم زنبورها یا Bees Algorithm در متلب - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
الگوریتم تکامل تفاضلی - کلیک کنید (+)	۱ ساعت
الگوریتم بهینه سازی علف هرز مهاجم یا IWO در متلب - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
الگوریتم بهینه سازی مبتنی بر و یادگیری یا - TLBO کلیک کنید (+)	۱ ساعت
الگوریتم بهینه سازی جهش قورباغه یا SFLA در متلب - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
بهینه سازی چند هدفه در متلب - کلیک کنید (+)	۱۹ ساعت
بهینه سازی مقید در متلب - کلیک کنید (+)	۹ ساعت
شبکه های عصبی مصنوعی در متلب - کلیک کنید (+)	۲۸ ساعت
آموزش کاربردی شبکه های عصبی مصنوعی - کلیک کنید (+)	۹ ساعت
آموزش استفاده از شبکه عصبی مصنوعی با نروسولوشن - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
شبکه عصبی GMDH در متلب - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
شبکه های عصبی گازی به همراه پیاده سازی عملی در متلب - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
طبقه بندی و بازشناسی الگو با شبکه های عصبی LVQ در متلب - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
آموزش پیاده سازی الگوریتم های تکاملی و فراابتکاری در سی شارپ - کلیک کنید (+)	۸ ساعت

آمار و داده کاوی	
عنوان آموزش	**مدت زمان تقریبی**
گنجینه فرادرس های یادگیری ماشین و داده کاوی - کلیک کنید (+)	۸۸ ساعت
گنجینه فرادرس های محاسبات هوشمند - کلیک کنید (+)	۷۱ ساعت
آموزش یادگیری ماشین - کلیک کنید (+)	۲۴ ساعت
داده کاوی یا Data Mining در متلب - کلیک کنید (+)	۲۴ ساعت
آموزش داده کاوی در - RapidMiner کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش وب کاوی - کلیک کنید (+)	۱۷ ساعت
شبکه های عصبی مصنوعی در متلب - کلیک کنید (+)	۲۸ ساعت
آموزش کاربردی شبکه های عصبی مصنوعی - کلیک کنید (+)	۹ ساعت
شبکه عصبی GMDH در متلب - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
شبکه های عصبی گازی به همراه پیاده سازی عملی در متلب - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
طبقه بندی و بازشناسی الگو با شبکه های عصبی LVQ در متلب - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
خوشه بندی با استفاده از الگوریتم های تکاملی و فراابتکاری - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
تخمین خطای کلاسیفایر یا - Classifier کلیک کنید (+)	۲ ساعت
انتخاب ویژگی یا - Feature Selection کلیک کنید (+)	۲ ساعت
انتخاب ویژگی با استفاده از الگوریتم های فرا ابتکاری و تکاملی - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
کاهش تعداد رنگ تصاویر با استفاده از روش های خوشه بندی هوشمند - کلیک کنید (+)	۱ ساعت
آموزش پردازش سیگنال های واقعی در متلب - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
مبانی و کاربردهای راهبرد تلفیق داده یا - Data Fusion کلیک کنید (+)	۹ ساعت
آمار و احتمال مهندسی - کلیک کنید (+)	۱۳ ساعت

آزمون‌های فرض مربوط به میانگین جامعه نرمال در - SPSS کلیک کنید (+)	۳ ساعت
آمار و داده کاوی (ادامه از صفحه قبل)	
عنوان آموزش	**مدت زمان تقریبی**
آموزش محاسبات آماری در اکسل - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش کنترل کیفیت آماری - کلیک کنید (+)	۵ ساعت
آموزش کنترل کیفیت آماری با - SPSS کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش مدل سازی معادلات ساختاری با - Amos کلیک کنید (+)	۷ ساعت
تجزیه و تحلیل اطلاعات با نرم‌افزار - SASکلیک کنید (+)	۴ ساعت

مهندسی برق	
عنوان آموزش	**مدت زمان تقریبی**
طراحی دیجیتال با استفاده از وریلوگ یا - Verilog کلیک کنید (+)	۷ ساعت
آموزش جامع مدارهای منطقی - کلیک کنید (+)	۱۰ ساعت
آموزش مروری طراحی و پیاده سازی مدارات منطقی - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
آموزش میکروکنترلر AVR و نرم‌افزار - CodevisionAVRکلیک کنید (+)	۴ ساعت
آموزش تکمیلی میکروکنترلر AVR و نرم‌افزار - CodevisionAVRکلیک کنید (+)	۴ ساعت
آشنایی باPLC های ساخت شرکت های Omron و - Keyence کلیک کنید (+)	۶ ساعت
میکروکنترلر PIC با کامپایلر - CCS کلیک کنید (+)	۹ ساعت
آموزش تحلیل و طراحی مدارات الکترونیکی با - Proteus کلیک کنید (+)	۳ ساعت
آموزش شبیه سازی و تحلیل مدارهای الکتریکی و الکترونیکی با پی اسپایس (PSpice) -کلیک کنید (+)	۳ ساعت
آموزش مقدماتی - ADS کلیک کنید (+)	۳ ساعت
آموزش تکمیلی آنالیز مدار با نرم‌افزار - ADSکلیک کنید (+)	۲ ساعت

مهندسی برق (ادامه از صفحه قبل)	
عنوان آموزش	مدت زمان تقریبی
آموزش تحلیل ریاضی مدارات الکتریکی با - OrCAD کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش شبیه سازی مدارات الکترونیکی با - Orcad Capture کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش برنامه نویسی آردوینو (- (Arduinoکلیک کنید (+)	۸ ساعت
آموزش تکمیلی برنامه نویسی آردوینو - (Arduino) کلیک کنید (+)	۷ ساعت
آموزش طراحی برد مدار چاپی به کمک نرم‌افزار - Altium Designer کلیک کنید (+)	۷ ساعت
آموزش مبانی ربات های برنامه پذیر - کلیک کنید (+)	۵ ساعت
آموزش ساخت روبات و کنترل آن با اندروید - کلیک کنید (+)	۱۶ ساعت
آموزش مدارهای الکتریکی ۱ - کلیک کنید (+)	۹ ساعت
آموزش مدارهای الکتریکی ۲ - کلیک کنید (+)	۱۱ ساعت
آموزش سیستم های کنترل خطی - کلیک کنید (+)	۱۰ ساعت
آموزش مکاترونیک کاربردی ۱ - کلیک کنید (+)	۱۳ ساعت
آموزش کامسول (مباحث منتخب) - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
آموزش سینماتیک مستقیم و معکوس ربات‌ها -کلیک کنید (+)	۳ ساعت
آموزش تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم ها - کلیک کنید (+)	۲۷ ساعت
آموزش متلب با نگرش تحلیل آماری، تحلیل سری های زمانی و داده های مکانی - کلیک کنید (+)	۸ ساعت
پردازش سیگنال های دیجیتال با استفاده از نرم‌افزار متلب - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
شبیه سازی سیستم با سیمیولینک - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
آموزش سیستم های قدرت در سیمولینک و متلب - کلیک کنید (+)	۱۱ ساعت
آنالیز پایداری و کنترل سیستم های قدرت با استفاده از جعبه ابزارهای نرم‌افزار متلب - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آشنایی با SimPowerSystems در شبیه سازی سیستم های قدرت - کلیک کنید (+)	۳ ساعت

مهندسی برق (ادامه از صفحه قبل)	
عنوان آموزش	مدت زمان تقریبی
شبیه سازی ماشین های الکتریکی در تولباکس های Simulink و SimPowerSystem در نرم‌افزار متلب - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
آموزش الکترونیک قدرت – شبیه سازی در متلب و سیمولینک - کلیک کنید (+)	۸ ساعت
آموزش شبیه سازی عملکرد انواع ماشین های الکتریکی در سیمولینک متلب - کلیک کنید (+)	۱۰ ساعت
برنامه های پاسخگویی بار - کلیک کنید (+)	۴ ساعت
آموزش نرم‌افزار ETAP برای تحلیل سیستم های قدرت - کلیک کنید (+)	۲۱ ساعت
آموزش مقدماتی نرم‌افزار GAMSبرای حل مسائل بازار برق - کلیک کنید (+)	۵ ساعت
آموزش پخش بار اقتصادی (دیسپاچینگ اقتصادی) در GAMS - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
کاربرد فازی در سیستم های قدرت - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش نرم‌افزار HFSS - کلیک کنید (+)	۵ ساعت
طراحی آنتن مایکرواستریپ به کمک نرم‌افزار HFSS - کلیک کنید (+)	۱ ساعت
آموزش طراحی و شبیه سازی آنتن های SIW با HFSS - کلیک کنید (+)	۱ ساعت
آموزش بررسی کامل آنتن های مایکرواستریپ و طراحی آن توسط CST - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
آموزش تجزیه سیگنال به مولفه های مود ذاتی یا Empirical Mode Decomposition -کلیک کنید (+)	۴۰ دقیقه
نمونه برداری و بازسازی اطلاعات در سیستم های کنترل دیجیتال - کلیک کنید (+)	۳ ساعت
بررسی پاسخ ورودی پله در شناسایی فرآیندهای صنعتی - کلیک کنید (+)	۱ ساعت
مدل سازی و شناسایی سیستم های دینامیکی با استفاده از مدل ARX و شبکه فازی عصبی - ANFIS کلیک کنید (+)	۱ ساعت
طراحی و تنظیم ضرایب کنترل کننده PID با منطق فازی - کلیک کنید (+)	۲ ساعت
آموزش کنترل سیستم چهار تانک - کلیک کنید (+)	۲ ساعت

فصل ۶

درخت

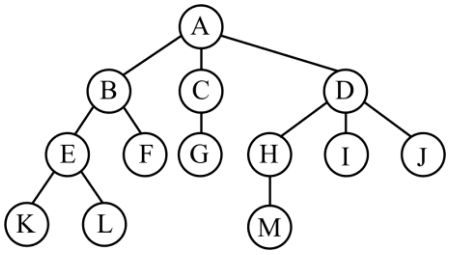
تعاریف اولیه

یک درخت مجموعه محدودی از یک یا چند گره می باشد که دارای گره خاصی به نام ریشه است و بقیه گره‌ها به n مجموعه مجزا تقسیم می‌شوند که هر یک از مجموعه‌ها خود نیز یک درخت می باشند.

درجه گره	تعداد زیردرخت های یک گره. (تعداد یالهایی که در گره برخورد دارند)
برگ	گره بدون فرزند (گره با درجه صفر)
ارتفاع گره v	طول بزرگترین مسیر از v به برگ w به طوری که w گره ای از زیر درختی بـه ریشـه v باشد.
ارتفاع درخت	ارتفاع ریشه
سطح(یا عمق) یک گره	طول مسیر از آن گره تا ریشه
درخت متوزان	درختی که سطح برگهای آن حداکثر یک واحد اختلاف داشته باشد.
درخت کاملا متوزان	درختی که سطح برگهای آن برابر است.

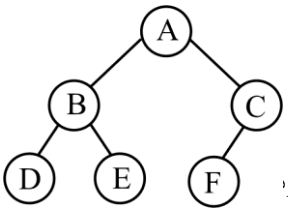
مثال

ارتفاع درخت زیر ۴ است: (ریشه را در سطح یک فرض کرده‌ایم)



درخت دودویی

درختی که تعداد فرزندان هر گره در آن حداکثر برابر دو باشد را درخت دودویی می نامند. به عبارتی یک درخت دودویی یا تهی است و یا حاوی مجموعه‌ای محدود از گره‌ها، که هر گره حداکثر دو فرزند دارد. مانند درخت زیر:



- بیشترین تعداد گره‌ها روی سطح i ام یک درخت دو
- بیشترین تعداد گره‌ها در یک درخت دودویی به ارتفاع h، برابر $2^h - 1$ می باشد.

مثال

بیشترین تعداد گره‌ها روی سطح پنجم یک درخت دودویی چند است؟ (ریشه در سطح یک می باشد.)

پاسخ: بیشترین تعداد گره‌ها روی سطح پنجم یک درخت دودویی، طبق رابطه $2^{(i-1)}$ برابر 16 است.

مثال

بیشترین تعداد گره‌ها در یک درخت دودویی به ارتفاع 4 چند است؟

پاسخ: بیشترین تعداد گره‌ها در یک درخت دودویی به ارتفاع 4 ، طبق رابطه $2^h - 1$ برابر 15 است.

در هر درخت دودویی رابطه $n_0 = n_2 + 1$ برقرار است. (n_0 تعداد برگها و n_2 تعداد گره‌های دو فرزندی)

مثال

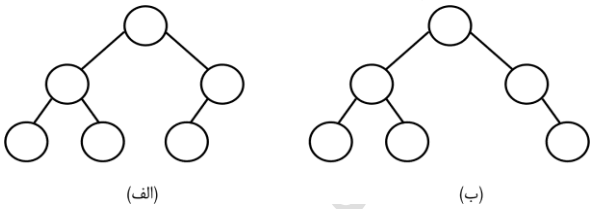
تعداد برگها در یک درخت دودویی شامل 10 گره با درجه دو را بدست آورید؟

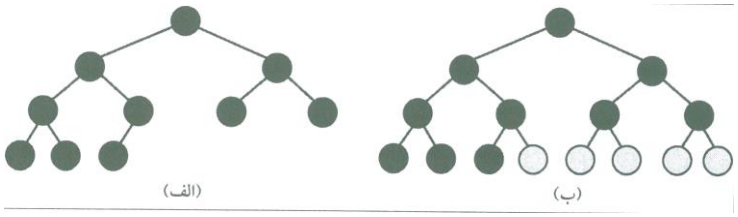
پاسخ: با توجه به رابطه $n_0 = n_2 + 1$ ، تعداد برگها برابر 11 می باشد.

درخت کامل

درختی که تمام سطح‌های آن بجز احتمالاً آخرین سطح، حداکثر تعداد گره‌های ممکن را داشته باشد و گره‌های سطح آخر تا حد امکان در سمت چپ باشند را کامل می نامند. به طور نمونه درخت شکل الف کامل می باشد ولی درخت شکل ب کامل نمی‌باشد:

نمونه ای از درخت دودویی کامل و تبدیل آن به درخت پر:





ارتفاع درخت دودویی کامل برابر $\lfloor \log_2^n \rfloor + 1$ می باشد.($\lfloor \log_2^n \rfloor + 1$ همان حد بالای $\log_2^{(n+1)}$ می باشد.)

تعداد گره های سطح آخر یک درخت دودویی کامل با n گره برابر است با :

$$n - (2^{(h-1)} - 1)$$

درخت پر

درختی که هم کامل و هم کاملاً متوازن باشد را درخت پر می نامند. در این درخت:

۱- ارتفاع درخت برابر $\log_2^{(n+1)}$ می باشد.

۲- تعداد گرهها برابر $2^h - 1$ می باشد.

۳- تعداد برگها، برابر $\frac{n+1}{2}$ و یا برابر $2^{(h-1)}$ می باشد.

۴- تعداد گره ها در سطح i ، برابر $2^{(i-1)}$ می باشد.

۵- تعداد لینک ها یکی کمتر از تعداد گره ها می باشد.

کران پایین و کران بالای تعداد گره ها

در یک درخت دودویی، کران بالای n برابر $2^h - 1$ (درخت پر) و کران پایین n برابر h می باشد. (درخت اریب). جدول زیر این کران ها را برای درخت دودویی کامل و پر هم نشان داده است:

درخت دودویی	$h \le n \le 2^h - 1$
درخت دودویی کامل	$2^{(h-1)} \le n \le 2^h - 1$
درخت دودویی پر	$2^h - 1 \le n \le 2^h - 1$

کران بالای ارتفاع درخت برابر n و کران پایین آن برابر $\lfloor \log n \rfloor + 1$ می باشد. بنابراین می توان نوشت:

$$\lfloor \log n \rfloor + 1 \le h \le n$$

با n گره می توان 2^{n-1} درخت دودویی متمایز(از لحاظ توپولوژی) به ارتفاع n ساخت.

درخت k تایی

درختی که حداکثر تعداد فرزندان هر گره آن برابر k باشد را درخت k تایی می نامند. معروفترین درخت k تایی، درخت دوتایی (دودویی) است.

در درخت k تایی با n گره تعداد nk اتصال وجود دارد که n-1 اتصال استفاده شده و nk-(n-1) اتصال تهی می باشد.

تعداد برگ ها در یک درخت k تایی :

$$n_0 = (k-1)n_k + (k-2)n_{k-1} + \ldots + n_2 + 1$$

(n_0 : تعداد برگها) (n_k : تعداد گره های k فرزندی)

تذکر: تعداد برگ ها مستقل از تعداد گره های تک فرزندی است.

مثال

در یک درخت سه تایی، اگر 5 گره دو فرزندی و 10 برگ داشته باشیم، آنگاه چند گره 3 فرزندی خواهیم داشت؟

پاسخ: در یک درخت سه تایی، رابطه زیر برقرار است:

$$n_0 = 2n_3 + n_2 + 1 \; n_3 = 2 \;\Rightarrow\; 10 = 2n_3 + 5 + 1 \;\Rightarrow$$

تعداد برگ ها در یک درخت **k تایی کامل** با n گره، برابر است با: $\left\lfloor \frac{(k-1)n+1}{k} \right\rfloor$

(یا $n - \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil$)

تعداد گره های غیر برگ در یک درخت **k تایی کامل** با n گره، برابر است با : $\left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil$

با دادن مقادیر ۲و۳و۴ به پارامتر k ، جدول زیر به دست می آید:

تعداد برگها در درخت دوتایی کامل	$n_0 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$
تعداد برگها در درخت سه تایی کامل	$n_0 = \left\lfloor \frac{2n+1}{3} \right\rfloor$
تعداد برگها در درخت چهارتایی کامل	$n_0 = \left\lfloor \frac{3n+1}{4} \right\rfloor$

مثال

یک درخت چهار تایی کامل با 27 گره، دارای چند گره برگ می باشد؟

$$n_0 = \left\lfloor \frac{3n+1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3 \times 27 + 1}{4} \right\rfloor = \lfloor 20.5 \rfloor = 20$$

مثال

حداکثر تعداد گره ها در یک درخت دودویی با **b** برگ چقدر است؟

پاسخ: کران بالا ندارد. چون یک درخت دودویی می تواند یک مسیر باشد و بی نهایت گره و تنها یک برگ داشته باشد.

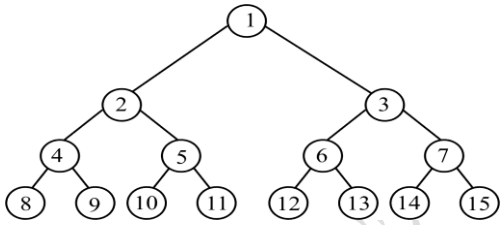
بیشترین تعداد گره‌ها روی سطح i ام یک درخت k تایی برابر است با : $k^{(i-1)}$

بیشترین تعداد گره‌ها در یک درخت k تایی به ارتفاع h، برابر است با : $\frac{k^h - 1}{k - 1}$

تعداد برگها در درخت k تایی پر به ارتفاع h برابر است با : $k^{(h-1)}$

درخت دودویی کامل شماره گذاری شده

به هر یک از گره های یک درخت دودویی کامل می توان یک شماره نسبت داد. در شکل زیر یک درخت دودویی کامل شماره گذاری شده با ارتفاع ۴ نمایش داده شده است:



در هر درخت دودویی کامل شماره گذاری شده، برای هر گره با اندیس i قواعد زیر برقرار است:

۱) اگر i=1 باشد، آنگاه ریشه است.

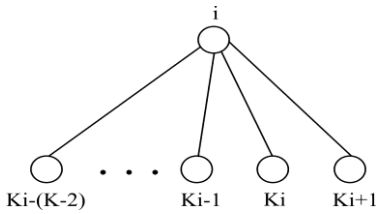
۲) اگر i< >1 ، آنگاه والد آن یعنی parent(i) ، در $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$ است.

۳) اگر 2i<=n، آنگاه فرزند چپ آن یعنی Leftchild(i) ، در 2i است.

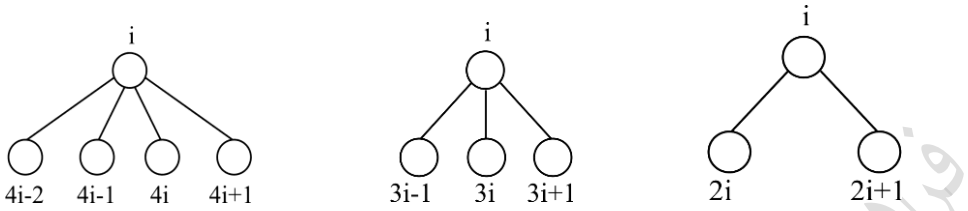
۴) اگر 2i+1<=n ، آنگاه فرزند راست آن یعنی Rightchild(i) ، در 2i+1 است.

تذکر: اگر 2i>n ، آنگاه i فرزند چپ ندارد و اگر 2i+1>n باشد، آنگاه i فرزند راست ندارد.

یک گره با شماره i در یک درخت k تایی دارای فرزندان با شماره های زیر می باشد:



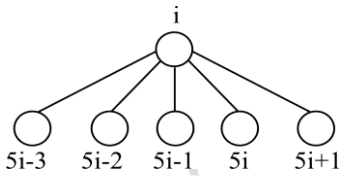
به طور نمونه در درخت های ۲ تایی، ۳ تایی و ۴ تایی داریم:



مثال

گره با شماره 15، در یک درخت 5 تایی کامل، پدر کدام گره ها می باشد؟(n=95)

پاسخ: گره i ام پدر گره های 5i+1 , 5i , 5i-1 , 5i-2 , 5i-3 می باشد:



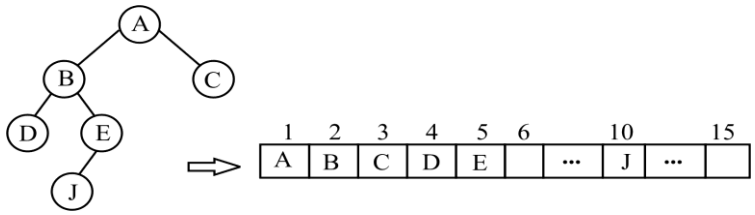
بنابراین گره پانزدهم پدر گره های 76 , 75 , 74 , 73 , 72 می باشد.

روشهای ذخیره درخت دودویی

یک درخت دودویی را می توان به کمک آرایه و یا لیست پیوندی در حافظه ذخیره کرد.

ذخیره درخت دودویی با استفاده از آرایه

برای ذخیره یک درخت دودویی به کمک آرایه ، گره i ام با توجه به درخت دودویی کامل شماره گذاری شده ، در خانـه i ام در آرایه ذخیره می شود. در شکل زیر ذخیره درخت داده شده در آرایه نمایش داده شده است:



گره با شماره 1 (با مقدار A) در خانه اول و گره با شماره 5 (با مقدار E) در خانه پنجم آرایه ذخیره می شود

ذخیره درخت دودویی با استفاده از لیست پیوندی

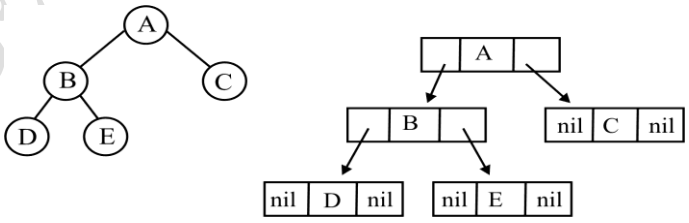
هر گره در درخت دودویی شامل سه قسمت "داده، اشاره گر به فرزند چپ و اشاره گر به فرزند راست " می باشد. تعریف یک گره درخت دودویی در زبان c به صورت زیر است:

```
typedef  struct  node  *tree-pointer;
typedef  struct  node{
      int              data;
      tree-pointer     left;
      tree-pointer     right;
};
```

درخت دودویی با n گره دارای 2n اشاره گر است که تعداد n-1 اشاره گر استفاده شده و n+1 اشاره گر اسـتفاده نشـده (تهی) می باشد.

مثال

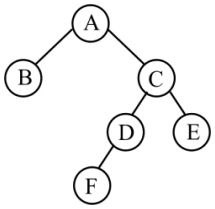
نمایش درخت دودویی با استفاده از لیست پیوندی:



مشاهده می شود که درخت دودویی بالا با 5 گره، شامل 10 اشاره گر است که 4 اشاره گر آن استفاده شده و 6 اشاره گر استفاده نشده (nil) می باشد.

مثال

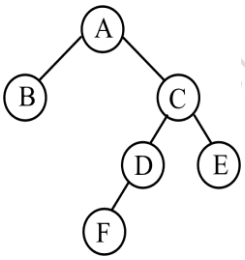
درخت زیر را به روش پرانتزی نمایش دهید.



پاسخ: A(B,C(D(F),E)))

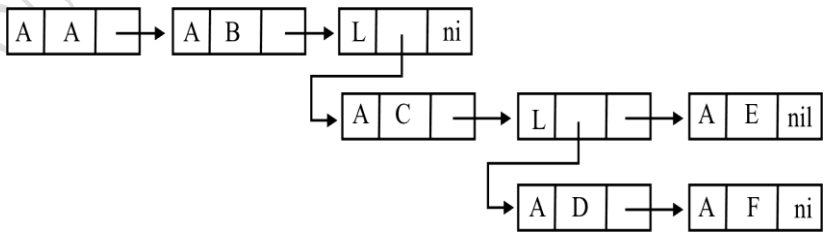
مثال

درخت زیر را با استفاده از لیست عمومی نمایش دهید.



پاسخ:

در این روش فرزندان هر گره در سمت راست آن ذکر می‌شوند و هر فرزندی که خود برگ نباشد به صورت یک زیر لیست نمایش داده می‌شود. گره‌های لیست با حرف L و گره‌های اتم با حرف A مشخص می‌شوند.



تعداد درخت های دودویی

اگر بخواهیم تعداد درخت های دودویی متفاوت را که می توان با n گره ساخت را بدست آوریم، فرض می کنیم هر یک از گره ها را به روش inorder از 1 تا n شماره گذاری کرده ایم. با فرض اینکه گره شماره $i \ (1 \le i \le n)$ ریشه باشد، در آن صورت i-1 گره در زیر درخت چپ ریشه و n-i گره در زیر درخت راست ریشه باید قرار داشته باشد. بنابراین اگر T(n) را تعداد درخت های دودویی با n گره باشد، تعداد زیر درخت های چپ ریشه برابر T(i-1) و تعداد زیر درخت های راست ریشه برابر T(n-i) خواهد بود. بنابراین اگر گره i ریشه باشد، حاصل ضرب $T(i)T(n-i)$ برابر تعداد کل درخت ها می باشد. با در نظر گرفتن همه حالتها داریم:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} T(i-1)T(n-i)$$
$$T(0) = T(1) = 1$$

تذکر: این رابطه را می توان به صورت $b_n = \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} b_{n-k}$ نیز نشان داد. مقدار b_n برابر $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ می باشد که همان n امین عدد کاتالان است. می توان نشان داد که :

$$b_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\ n^{3/2}}(1 + O(1/n)) \in \Omega(2^n)$$

مثال

تعداد درختهای دودویی متفاوت که با 3 گره می‌توان ساخت را مشخص نمایید.

پاسخ: یکی را ریشه قرار داده و حالت های زیر را ایجاد می کنیم:

الف- هر دو گره در راست ریشه

ب- یک گره در چپ ریشه و یک گره در راست ریشه

ج- هر دو گره در چپ ریشه

این حالتها با رابطه $b_3 = b_0 b_2 + b_1 b_1 + b_2 b_0$ قابل بیان است، که از آنجا که $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2$ داریم:

$$b_3 = 1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 5$$

یعنی 5 درخت متفاوت می توان با 3 گره ساخت.

مثال

تعداد درختهای دودویی متفاوت که با 3 گره می‌توان ساخت را مشخص نمایید.

پاسخ: تعداد درخت های دودویی مجزا با n گره برابر $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ می باشد.

$$\frac{\binom{6}{3}}{4} = \frac{\frac{6!}{3!\times 3!}}{4} = \frac{\frac{6\times 5\times 4\times 3!}{3!\times 3!}}{4} = \frac{5\times 4}{4} = 5$$

■

الگوریتم های کار بر روی درخت دودویی

الگوریتم های زیادی برای کار بر روی درخت دودویی می توان نوشت، از جمله الگوریتم کپی گرفتن، محاسبه ارتفاع، شمارش تعداد گره ها و شمارش تعداد برگها.

کپی گرفتن از درخت دودویی

```
tree-pointer  copy (treepointer  *p){
   tree-pointer  temp;
   if (p){
           t = malloc(sizeof(node) );
           t -> data   = p->data;
           t -> lchild = copy (p -> lchild );
           t -> rchild = copy (p -> rchild);
          return  t ;
      }
    return (NULL);
}
```

محاسبه ارتفاع درخت دودویی

```
int  depth (tree-pointer   root ) {
  int  d;
  if ( root == NULL)  return  0;
  x = depth( root ->left  );
  y = depth( root ->right );
  if  (x > y)
      d=x+1;
  else
     d=y+1;
  return  d;
 }
```

شمارش تعداد نودهای درخت دودویی

```
int  count (tree-pointer  root ){
```

```
  int  c;
  if ( root== NULL)  return  0;
  a =  count ( root  ->left ) ;
  b = count ( root  ->right );
  c = a+b+1;
  return c;
}
```

این تابع به طور بازگشتی تعداد گره های سمت چپ را شمرده و در NUML قرار داده و همچنین تعداد گره های سمت راست را در NUMR قرار می دهد و با افزایش یک واحد (شمارش ریشه) به مجموع این دو مقدار، تعداد گره های درخت را محاسبه می کند.

شمارش تعداد برگهای درخت دودویی

```
int  f (treepointer  *t){
    if  (t==NULL)  return  0;
    else  if (t->lchild==NULL)  && ( t->rchild==NULL)
              return 1;
          else
            return ( f (t->lchild) + f (t->rchild) );
}
```

این تابع به طور بازگشتی به تک تک گره‌های درخت سر می‌زند و به ازای هر گره برگ، مقدار 1 را برمی‌گرداند و به ازای سایر گره‌ها، تابع را با اشاره گره‌های چپ و راست آن گره صدا می‌زند و مقادیر بازگشتی را با هم جمع می‌کند و بعنوان خروجی به ازای آن گره برمی‌گرداند.

می توان این تابع را به صورت زیر نشان داد:

$$f(t) = f(left(t]) + f(right[t]) + IsLeaf(t)$$

که تابع IsLeaf(t) اگر t برگ باشد مقدار 1 و گرنه مقدار 0 را برمی گرداند.

پیمایش درخت دودویی

پیمایش درخت، یعنی حرکت روی یالهای درخت و ملاقات همه گره های آن دقیقا یکبار. اگر انشعاب به چپ در هر گره درخت دودویی را با L ، انشعاب به راست را با R و ملاقات گره را با V نمایش دهیم، امکان تولید شش ترکیب RLV,RVL,VRL,LRV,LVR,VLR وجود دارد.

در سه پیمایش همواره انشعاب به چپ قبل از انشعاب به راست صورت گرفته که روشهای معمول می‌باشند و عبارتند از:

۱) پیشوندی (VLR) (ریشه ـ چپ ـ راست) (preorder)

۲) میانوندی (LVR) (چپ ـ ریشه ـ راست) (inorder)

۳) پسوندی (LRV) (چپ ـ راست ـ ریشه) (postorder)

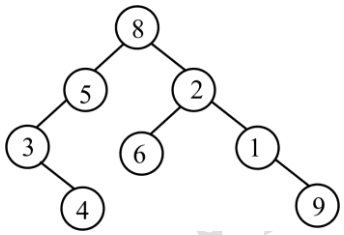
در پیمایش پیشوندی، ابتدا ریشه ملاقات می شود. سپس زیر درخت سمت چپ به روش پیشوندی پیمایش می شود. در نهایت زیر درخت سمت راست به روش پیشوندی پیمایش می شود.

پسوندی	میانوندی	پیشوندی

void **f** (tree-pointer p)
{
if (p){
f (p –> left);
f (p –> right);
cout<<**p**–>
data;
}
}
	void **f** (tree-pointer p)
	{
	if (p){
	f (p –> left);
	cout<<**p**–>
	data;
	f (p –> right);
	}
	}
		void **f** (tree-pointer p)
		{
		if (p){
		cout << **p**–>
		data;
		f (p –> left);
		f (p –> right);
		}
		}

مثال

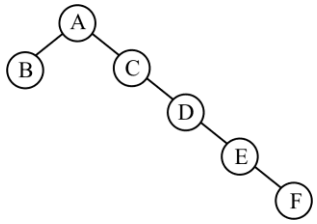
حاصل پیمایش های معمول درخت زیر را بدست آورید.



inorder : 34586219
preorder : 85342619
postorder : 43569128

مثال

حاصل پیمایش های معمول درخت زیر را بدست آورید.

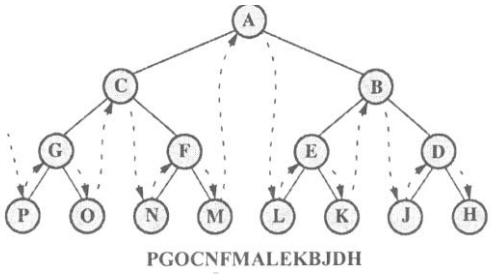


inorder : BACDEF preorder : ABCDEF postorder : BFEDCA

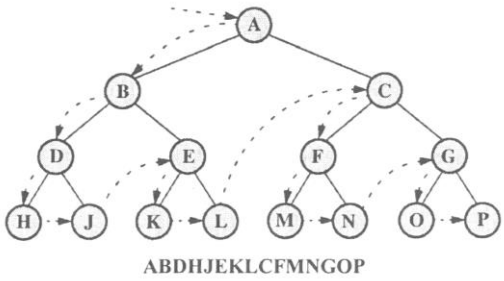
مثال

شکل های زیر شیوه پیمایش درخت دودویی را نشان می دهد:

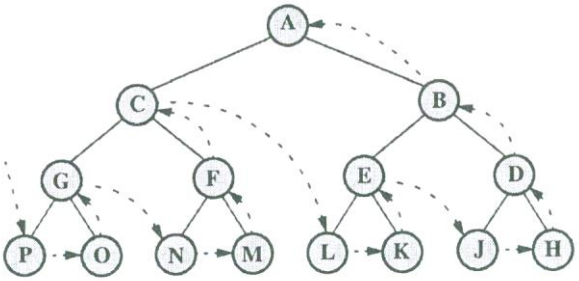
الف : inorder



ب : preorder



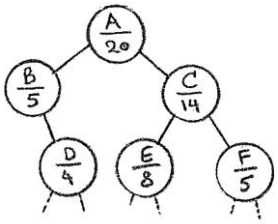
ج : postorder



POGNMFCLKEJHDBA

مثال

در شکل زیر قسمتی از یک درخت دودویی نشان داده شده است. در زیر برچسب هر گره عددی نوشته شده است که تعداد کل گره های موجود در زیر درخت آن گره بعلاوه خود آن گره را نشان می دهد. در پیمایش preorder گره F چندمین گره خواهد بود؟



پاسخ:

برای ملاقات F در پیمایش preorder (ریشه- چپ-راست)، مراحل زیر انجام می شود:

الف- پیمایش گره A (ریشه)

ب- پیمایش 5 گره واقع در زیر درخت چپ A

ج- پیمایش گره C

د- پیمایش 8 گره واقع در زیر درخت چپ C

ه- پیمایش گره F

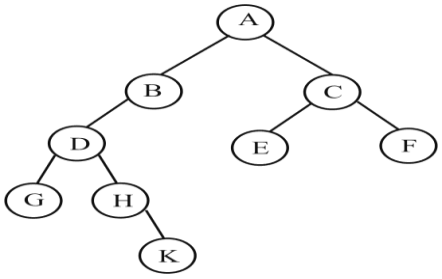
بنابراین گره F ، 16 امین گره در پیمایش preorder می باشد.

1+5+1+8+1=16

■

مثال

تعداد push و pop های مورد نیاز برای پیمایش preorder درخت دودویی زیر را بدست آورید؟



پاسخ:

تعداد چهار push و چهار pop داریم. در پیمایش preorder (ریشه– چپ–راست)، بچه‌های راست (C,H,K,F) در پشته push می شوند. مراحل کار به صورت زیر است:

۱- قرار دادن آدرس گره با مقدار A در PTR

۲- پردازش A و push بچه راست آن یعنی **C**

۳- پردازش B

۴- پردازش D و push بچه راست آن یعنی **H**

۵- پردازش G

۶- pop کردن عنصر بالای پشته یعنی H و قرار دادن آن در PTR

۷- پردازش H و push کردن بچه راست آن یعنی **K**

۸- pop کردن K از پشته و قرار دادن PTR=K

۹- پردازش K

۱۰- POP کردن C از پشته و قرار دادن C در PTR

۱۱- پردازش C، push کردن بچه راست **F**

۱۲- پردازش E

۱۳- pop کردن F و قرار دادن F در PTR

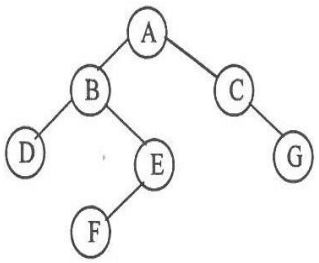
۱۴- پردازش F.

مثال

خروجی الگوریتم زیر برای درخت باینری داده شده کدام است؟

```
f ( t ){
   if (t==null)  return;
```

```
    if (t->left != null )   cout<< '(' ;
    f(t-> left);
    if (t->left != null )   cout<< ')' ;
    cout<<t->data;
    if (t->right != null ) cout<< '(' ;
    f (t->right);
    if (t->right != null )  cout<< ')' ;
}
```



پاسخ:

تابع داده شده، دنباله inorder درخت را به صورت پرانتز گذاری شده چاپ می کند.(قبل و بعد از ریشه درخت و ریشه زیر درخت ها، پرانتز نمی گذارد.)

((D) B ((F) E)) A (C (G))

پیمایش inorder غیر بازگشتی

برای شبیه سازی بازگشت پذیری نیاز به پشته داریم. گره های چپ داخل پشته قرار می گیرند تا هنگامیکه به یک گره تهی برسیم و سپس گره از پشته خارج و فرزند راست آن گره در پشته قرار می گیرد. هر زمان پشته تهی شود، پیمایش کامل می گردد.

```
void  inorder(tree-pointer  node){
    int  top = -1;
    tree-pointer  stack[MAX};
    for( ;  ;  ) {
      for ( ; node ; node=node – >left)
            add(&top,node);
      node = delete(&top);
      if (!node)  break;
      cout << node – >data;
      node = node  – >right;
   }
}
```

تذکر: تابع add با آنچه که در فصل پشته تعریف شده، متفاوت بوده زیرا نوع عناصر پشته متفاوت می باشند. تابع delete ، بجای بازگشت نوع عنصر(element) مقدار tree-pointer را برگشت می دهد. اگر پشته خالی باشد، مقدار NULL برگشت داده می شود.

هر گره درخت فقط یکبار در پشته قرار گرفته و یا از آن خارج می گردد. بنابراین، اگر تعداد گره های درخت برابر با n باشد، پیچیدگی زمان تابع برابر با $O(n)$ می باشد. حافظه مورد نیاز برابر با ارتفاع درخت است که مساوی با $O(n)$ می باشد.

مشخص کردن گره های تک فرزندی با داشتن دو پیمایش پیشوندی و پسوندی

می توان به کمک دو پیمایش preorder و postorder یک درخت دودویی، گره های تک فرزندی را مشخص کرد. برای این کار در پیمایش Preorder از چپ به راست حرکت کرده و زوج پشت سرهمی که معکوس آن در پیمایش postorder باشد را پیدا می کنیم. اولین گره در این زوج ها، گره های تک فرزندی می باشند.

مثال

گره های تک فرزندی درخت دودویی با پیمایش های زیر را مشخص کنید.

Preorder : 85342619

Postorder : 43569128

پاسخ:

زوج هـای پشـت سـرهمی کـه در preorder وجـود دارنـد و معکـوس آنهـا در postorder موجـود اسـت، عبارتنـد از:(53)و(34)و(19). بنابراین اولین گره این زوج ها یعنی1,3,5،گره های تک فرزندی می باشند.

رسم درخت دودویی با داشتن دو پیمایش" preorder و inorder " و یا "postorder و inorder"

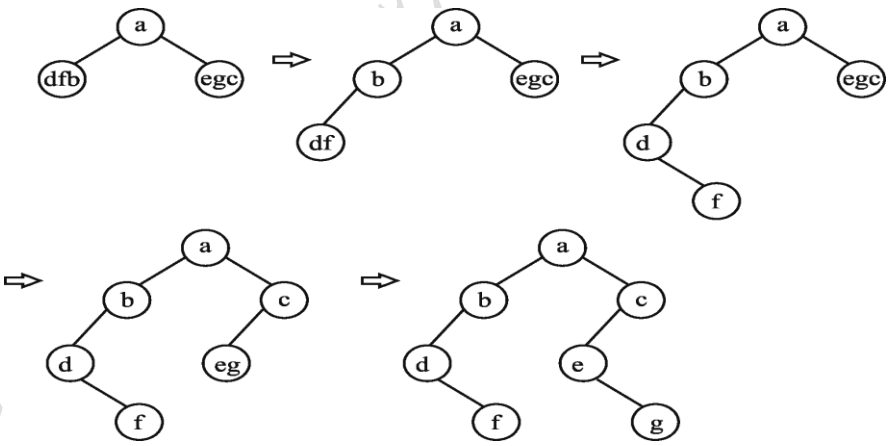
می توان با داشتن دو پیمایش از یک درخت دودویی، درخت را ترسیم کرد، به شرط آنکه یکی از آنها میانوندی باشد.

مثال

درخت دودویی که پیمایش پیشوندی آن abdfceg و پیمایش میانوندی آن dfbaegc باشد، را رسم نمایید.

پاسخ:

گره a ریشه است، چون ریشه اولین گره از پیمایش پیشوندی است و با توجه به موقعیت a در پیمایش میانونـدی، مشـخص می شود که گره dfb در سمت چپ ریشه و گره های egc در سمت راست ریشه قرار دارند. حال در پیمـایش پیشـوندی بـه جلو حرکت کرده و به گره b می رسیم و با نگاه به موقعیت b در پیمایش میانوندی مشخص می شـود کـه گـره هـای df در چپ b قرار دارند و به همین روال ادامه می دهیم و درخت را می سازیم:



با داشتن پیمایش postorder یک درخت دودویی کامل با برچسب‌های متفاوت و مشخص بودن برچسب‌های برگ‌های درخت، می‌توان درخت را ساخت و حاصل درختی واحد است.

رسم درخت دودویی با داشتن دو پیمایش preorder و postorder

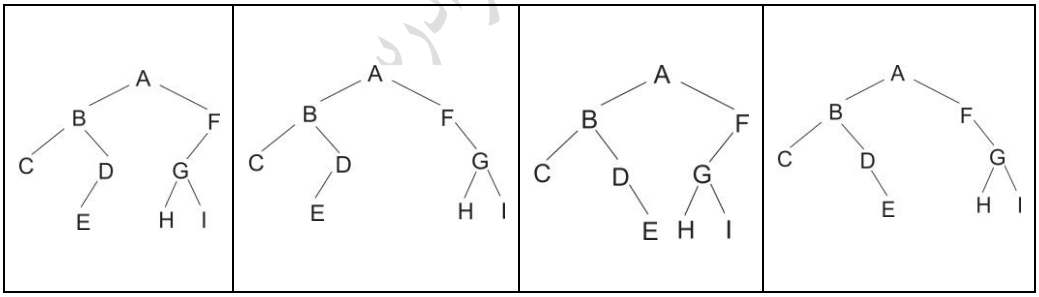
اگر پیمایشهای پیشوندی و پسوندی یک درخت دودویی با n گره در دسترس باشند، ریشه و گره‌های تک فرزندی را می‌توان تعیین کرد، اما محل گره‌های تک فرزندی را نمی‌توان مشخص کرد. بنابراین در صورت وجود گره های تک فرزندی، چندین درخت می توان ایجاد کرد که پیمایش preorder و postorder آنها با هم برابر باشند. تعداد این درخت ها برابر است با 2^k که k تعداد گره های تک فرزندی است.

مثال

درخت دودویی که پیمایش پیشوندی و پسوندی آن به صورت زیر است را رسم نمایید.

Preorder : A B C **DE** **FG** H I
Postorder : C **ED** B H I **GF** A

پاسخ: در پیمایش Preorder از چپ به راست حرکت کرده و زوج پشت سرهمی که معکوس آن در پیمایش postorder باشد را پیدا می کنیم. در این مثال دو زوج داریم : (DE) و (FG) . اولین گره در این زوج ها، یعنی D و F گره های تک فرزندی می باشند. با توجه به اینکه E می تواند در چپ یا راست D قرار بگیرد و یا G در چپ یا راست F قرار بگیرد، چهار حالت رخ می دهد که در تمامی آنها، پیمایش preorder و postorder یکسان است. این درخت ها در شکل زیر نشان داده شده اند:



مثال

درخت دودویی که پیمایش پیشوندی و پسوندی آن به صورت زیر است را رسم نمایید. (در این درخت ، هر گره دارای دو فرزند است)

Preorder : A B D J E O P F C G M H I K L
Postorder : D O P E F J B G H K L I M C A

پاسخ: واضح است که A ریشه است. برای پیدا کردن کاراکترهای زیر درخت چپ A ، در ترتیب Preorder و پس از A به دنبال رشته ای می گردیم که کاراکترهای آن به طور کامل در رشته ای از ابتدای ترتیب Postorder هم ظاهر شود. بدیهی است که حرف اول preorder با حرف آخر postorder باید یکی باشند. این کاراکترها عبارتند از: BDJEOPF . بنابراین کاراکترهای C G M H I K L در راست A قرار دارند. همین روال را به صورت بازگشتی بر روی هر یک از زیر درخت ها اعمال کرده تا درخت اصلی را به دست آورد. این روال از مرتبه $O(n^2)$ می باشد.

در درخت دودویی با داشتن هر سه شرط زیر می توان درخت را ساخت و حاصل نیز یکتا می باشد:

۱- همه گره ها برگ یا دو فرزندی باشند.

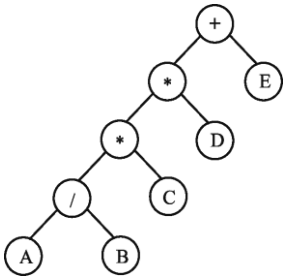
۲- برچسب برگ ها در پیمایش مشخص باشد.

۳- یکی از پیمایش های preorder یا postorder یا levelorder وجود داشته باشد.

پیمایش درخت به ترتیب سطح

پیمایشهای میانوندی، پیشوندی و پسوندی به هر دو صورت بازگشتی یا تکرار مراحل، به پشته نیاز دارند. در پیمایش درخت به ترتیب سطح از صف استفاده می شود. در این پیمایش اول ریشه، بعد فرزند چپ ریشه و سپس فرزند راست ریشه ملاقات می شوند. این فرآیند تکرار می شود، بررسی گره ها در هر سطح جدید از سمت چپ به راست، صورت می گیرد.

پیمایش به ترتیب سطح درخت زیر +*E*D/CAB می باشد:



زیربرنامه پیمایش به ترتیب سطح یک درخت دودویی

```
void  levelorder (tree-pointer  ptr){
    int   front = rear = 0;
    tree-pointer  queue[MAX};
    if (!ptr)  return;
    addq(front ,&rear , ptr);
    for( ; ; ) {
      ptr = deleteq(&front , rear);
      if (ptr){
        cout << ptr  − >data;
        if ( ptr  − >left )    addq( front , &rear , ptr − > left);
        if ( ptr  − >right )   addq( front , &rear , ptr  − >right);
        r = q.delete( );
      }
  }
```

درخت نخی دودویی

از 2n اشاره‌گر موجود در یک درخت دودویی با nگره،n-1 اشاره‌گر استفاده شده وn+1 اشاره‌گر استفاده نشده است. با استفاده از این اشاره‌گرهای بدون استفاده می‌توان به عناصر قبلی یا بعدی در یک پیمایش اشاره کرد که باعث بالا رفتن سرعت پیمایش درخت می‌شود. به درختی که از اشاره‌گرهای بدون استفاده آن این چنین استفاده شود درخت نخی می‌گویند.

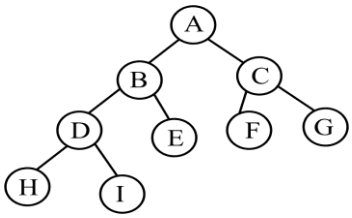
قوانین ایجاد اتصالات نخی

۱- اگر ptr->left تهی باشد، آن را طوری تغییر می دهیم که به گره ای که در پیمایش inorder قبل از ptr قرار دارد، اشاره کند.

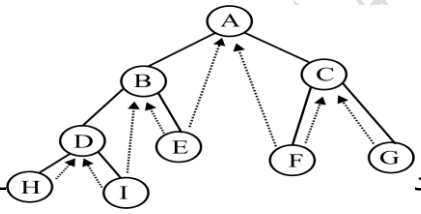
۲- اگر ptr->right تهی باشد، آن را به گونه ای تغییر می دهیم که به گره ای که در پیمایش inorder بعد از ptr قرار دارد، اشاره کند.

مثال

درخت نخ کشی شده حاصل از پیمایش inorder درخت زیر را بدست آورید؟



پاسخ: پیمایش میانوندی درخت به صورت H D I B E A F C G می‌باشد. درخت نخ کشی به صورت زیر است:



به طور مثال با توجه به پیمایش inorder ، در سمت راست آن گره C قرار دارد. و یا قبل و بعد از گره I در پیمایش inorder گره های D و B می باشند که اتصال های تهی گره I را به آن ها تنظیم می کنیم.

تذکر: چون می خواهیم که هیچ اتصالی تهی نباشد، یک گره head برای هر درخت دودویی نخی در نظر می گیریم. گره H اولین گره است و اشاره گر سمت چپ آن را به گره head تنظیم می کنیم. همچنین گره G آخرین گره پیمایش است و اشاره گر سمت راست آن را به گره head تنظیم می کنیم.

ساختار یک گره در درخت نخی دودویی به صورت زیر است:

```
typedef  struct  threaded-tree  *tp;
typedef  struct  threaded-tree{
   char       data;
   tp         left;
   tp         right;
   short int  lf;
   short int  rf;
```

```
};
```

از دو فیلد منطقی Lf,Rf برای امکان تشخیص اشاره‌گرهای واقعی از اشاره‌گرهای نخی استفاده می‌شود. اگر Lf=1 باشد، left یک اشاره‌گر نخی است و در غیر این صورت اشاره‌گر عادی به فرزند چپ است. اگر Rf=1 باشد، right یک اشاره‌گر نخی است و در غیر این صورت اشاره‌گر عادی به فرزند راست است.

پیمایش inorder یک درخت نخی دودویی

به کمک اشاره گرهای نخی می توان الگوریتم inorder را ساده تر نوشت. برای این کار می توانیم با فراخوانی مکرر تابع insucc تمام گره ها را بازیابی کنیم. تابع insucc بدون استفاده از پشته، گره بعدی در پیمایش inorder را در یک درخت نخی دودویی پیدا می کند.

```
void inorder(tp tree)
{
  for( ; ; ) {
    temp = insucc(temp);
    if (temp == tree) break;
    cout << temp->data;
  }
}
```

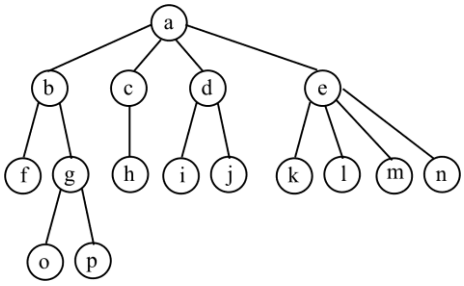
```
tp insucc(tp tree)
{
  tp temp;
  temp = tree -> right;
  if (! tree -> rf )
    while(! temp -> lf)
      temp = temp -> left;
  return temp;
}
```

تذکر: زمان محاسباتی این پیمایش نیز O(n) است.

تذکر: اتصالات نخی، الگوریتم preorder و postorder را نیز ساده می کند.

درخت عمومی

یک درخت k تایی که در آن فقط یک گره به نام ریشه با درجه ورودی صفر وجود دارد و سایر گره‌ها دارای یک کمان ورودی می‌باشند را درخت عمومی می گویند. شکل زیر، یک درخت عمومی ۴ تایی را نشان می‌دهد:



تفاوتهای درخت عمومی با درخت دودویی عبارتند از :

۱- **درخت دودویی می‌تواند تهی باشد، اما درخت عمومی نمی‌تواند تهی باشد.**

۲- با فرض اینکه یک گره دارای یک فرزند باشد، آنگاه این فرزند در یک درخت دودویی با عنوان بچه چپ یا راست از هم متمایز می‌شوند، اما در یک درخت عمومی تفاوتی بین آنها وجود ندارد.

تبدیل درخت عمومی به درخت دودویی

به دلیل اتلاف حافظه توسط اشاره‌گرهای تهی در درختهای عمومی، درخت عمومی را به درخت دودویی تبدیل می‌کنیم.

مراحل تبدیل عبارتند از:

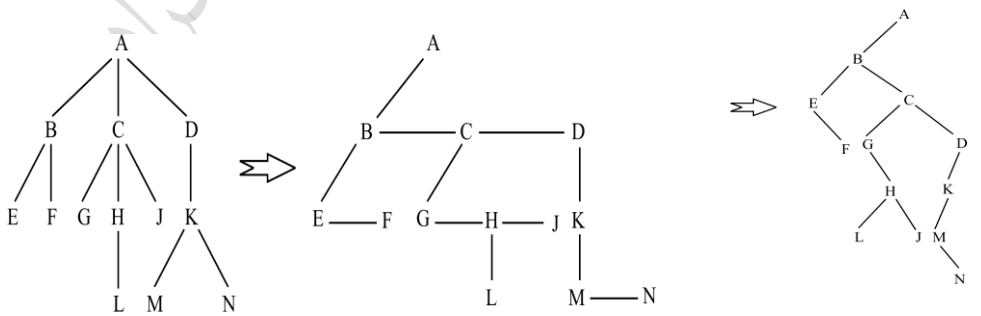
۱- در هر سطح کلیه گره‌های کنار هم (فرزندان یک پدر) را به یکدیگر متصل می‌کنیم.

۲- کلیه اتصالات گره‌ها به گره پدر، بجز اتصال سمت چپ‌ترین فرزند را قطع می‌کنیم.

۳- فرزند هر گره در سمت چپ و برادر هر گره در سمت راست آن گره قرار می گیرد. (برادر راست–فرزند چپ)

مثال

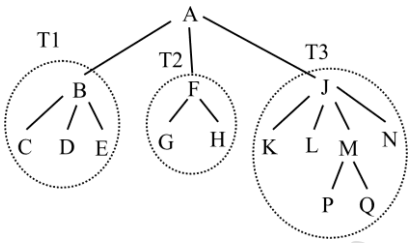
تبدیل درخت عمومی به درخت دودویی



- درخت معادل دودویی، در ریشه زیر درخت راست ندارد.
- هیچ پیمایشی در درخت عمومی متناظر با پیمایش postorder درخت دودویی معادل آن نمی‌باشد.

مثال

پیمایش preorder درخت عمومی زیر را پیدا کنید.



پاسخ: نحوه پیمایش preorder برابر است با :

۱-پردازش ریشه A

۲- پیمایش preorder درخت T1

۳- پیمایش preorder درخت T2

۴- پیمایش preorder درخت T3

نتیجه: A,B,C,D,E,F,G,H,J,K,L,M,P,Q,N

- البته می توان برای بدست آوردن پیمایش preorder یک درخت عمومی، آن را به درخت دودویی تبدیل کرده و سپس درخت دودویی حاصل را به صورت preorder پیمایش می کنیم.

مثال

پیمایشpostorder درخت عمومی مثال قبل را پیدا کنید.

پاسخ: نحوه پیمایش postorder برابر است با:

۱- پیمایش postorder درخت T1

۲- پیمایش postorder درخت T2

۳- پیمایش postorder درخت T3

۴- پردازش ریشه A.

نتیجه : C,D,E,B,G,H,F,K,L,P,Q,M,N,J,A

البته می توان برای بدست آوردن پیمایش postorder یک درخت عمومی، آن را بـه درخـت دودویـی تبـدیل کـرده و سپس درخت دودویی حاصل را به صورت inorder پیمایش می کنیم.

اگر T' درخت دودویی معادل درخت T باشد،آنگاه :

$$preorder(T') = preorder(T), \qquad inorder(T') = postorder(T)$$

جنگل

جنگل شامل n درخت مجزا است. به عبارتی مجموعه‌ای مرتب از صفر یا چند درخت متمایز است. همچنین می توان گفت با برداشتن ریشه یک درخت دودویی T، جنگل F به دست می‌آید. مراحل تبدیل جنگل به یک درخت دودویی عبارت است از:

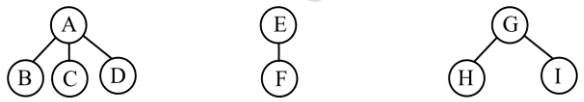
۱- هر درخت جنگل را به یک درخت دودویی تبدیل می‌کنیم.

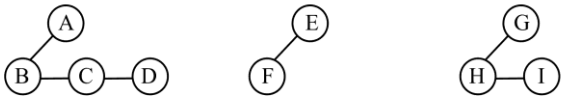
۲- درختهای دودویی را از طریق فرزند راست گره‌های ریشه به هم متصل می‌نماییم.

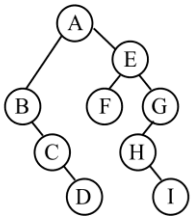
مثال

جنگل زیر که از ۳ درخت عمومی تشکیل شده را به یک درخت دودویی تبدیل کنید.

پاسخ: ابتدا هر یک از درختان عمومی را به دودویی تبدیل کرده و سـپس درختهـای دودویـی را از طریـق فرزنـد راسـت بـه یکدیگر متصل می نماییم.



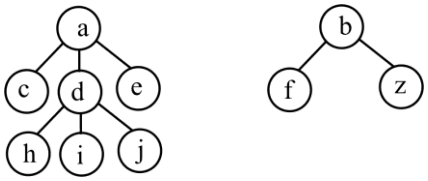




درخت دودویی حاصل از جنگل، در ریشه زیر درخت راست دارد.

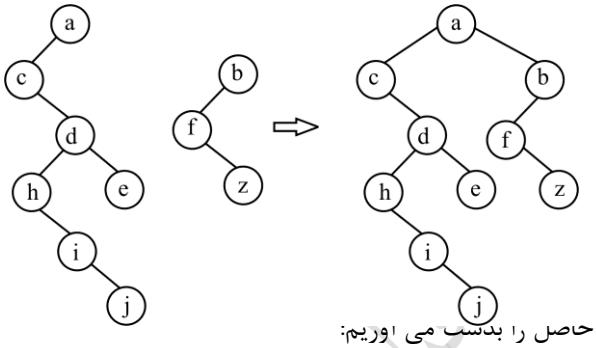
مثال

پیمایش inorder جنگل کدام است؟



پاسخ:

ابتدا جنگل را به درخت دودویی تبدیل می کنیم :



سپس پیمایش inorder درخت دودویی حاصل را بدست می آوریم:

chijdeafzb

- پیمایش inorder درخت دودویی و جنگل نتایج یکسانی دارند.
- پیمایشpreorder درخت دودویی و جنگل نتایج یکسانی دارند.
- پیمایش postorder درخت دودویی و جنگل همیشه نتایج یکسانی ندارند.

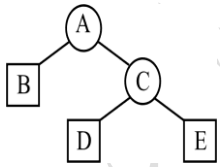
درخت دودویی گسترش یافته (2-Tree)

درخت دودویی که در آن هر گره 0 یا 2 فرزند دارد را 2-Tree (درخت ۲- کامل)می نامند. گره هایی که فرزند ندارند را خارجی و گره‌هایی که 2 فرزند دارند را داخلی می نامیم.

- در 2-Tree ، تعداد گره‌های خارجی را با E و تعداد گره‌های داخلی را با I نشان می دهیم.
- در 2-Tree مجموع تمام طولها از ریشه تا هر گره خارجی را طول مسیر خارجی (L_E) و مجموع تمام طولها از ریشه تا هر گره داخلی را طول مسیر داخلی (L_I) می نامیم.

مثال

با توجه به 2-TREE زیر ، طول مسیر خارجی (L_E) و طول مسیر داخلی را (L_I) بدست آورید.



پاسخ:

درخت داده شده شامل دو گره داخلی (A,C) و سه گره خارجی (B,D,E) می‌باشد، بنابراین E=3 و I=2 می باشد. برای محاسبه L_I،فاصله گره داخلی A از ریشه (یعنی صفر) را با فاصله گره داخلی C از ریشه (یعنی 1) جمع می کنیم. همچنین برای محاسبه L_E، فاصله گره خارجی B از ریشه (یعنی یک) و فاصله گره خارجی D از ریشه (یعنی 2) و فاصله گره خارجی E از ریشه (یعنی 2) را با هم جمع می کنیم:

$$L_I = 0+1=1 \ , \ L_E = 1+2+2=5$$

- در 2-Tree رابطه $E = I+1$ و $L_E = L_I + 2I$ برقرار است.
- یک 2-Tree با کمترین طول مسیر داخلی، یک درخت دودویی کامل است.
- در یک درخت ۲-کامل با ارتفاع h ، کمترین تعداد گره ها برابر $2h+1$ است. در این حالت، درخت شبیه یک مسیر است که از هر گره آن یک فرزند اضافه نیز خارج شده است.
- در یک درخت ۲-کامل با ارتفاع h ، بیشترین تعداد گره ها برابر $2^{h+1}-1$ است.(درخت کانند هرم است.)

مثال

یک درخت دودویی گسترش یافته شامل 6 گره خارجی می‌باشد. تعداد گره‌های داخلی آن چیست؟

پاسخ: در یک درخت دودویی گسترش یافته، تعداد گره‌های خارجی، یکی بیشتر از تعداد گره‌های داخلی است.

بنابراین اگر تعداد گره‌های خارجی 6 باشد، تعداد گره‌های داخلی 5 است.

مثال

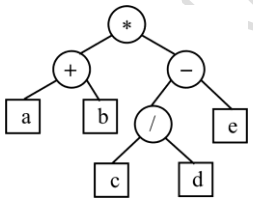
طول مسیر خارجی در یک درخت دودویی گسترش یافته شامل 5 گره داخلی، با طول مسیر داخلی 8، چند است؟

حل:

$$L_E = L_I + 2n = 8 + 2 \times 5 = 18$$

مثال

عبارت جبری متناظر با 2-TREE زیر کدام است؟



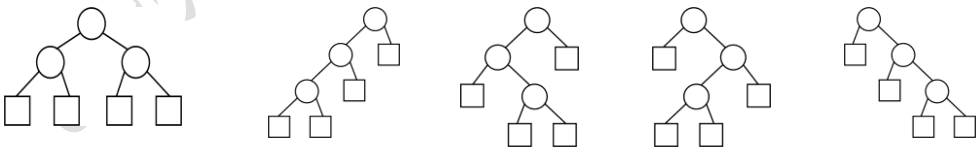
پاسخ: عبارت جبری متناظر با درخت داده شده برابر است با :

E =(a+b)*((c/d)–e)

مثال

چند 2-Tree غیر متشابه با 4 گره خارجی می‌توان ایجاد کرد؟

پاسخ: تعداد ۵ درخت دودویی توسعه یافته می توان به چهار گره خارجی به صورت زیر ساخت:



در واقع تعداد 2-TREE هایی که می توان با 4 گره خارجی ساخت برابر است با تعداد درختهای دودویی که

می توان با 3 گره ساخت.

تعداد 2-TREE هایی که می توان با n گره خارجی ساخت برابر است با تعداد درختهای دودویی که می توان بـا n-1 گره ساخت.

تذکر: درخت متناظر با یک عبارت جبری دلخواه که تنها از عملگرهای دوتایی استفاده می‌کند، نمونه ای مهـم از 2-TREE می‌باشد که عملوندها گره‌های خارجی و عملگرها، گره‌های داخلی می‌باشند.

مثال

در یک درخت **۲-کامل** ، اگر $n(T)$ تعداد گره های غیر برگ در T باشد و $h(T)$ ارتفاع T (فاصله دورترین برگ از ریشـه T) باشد ، آنگاه $n(T)-h(T)$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

با فرض اینکه T_R و T_L به ترتیب زیر درخت های راست و چپ T باشند، برای T که برگ نباشد، داریم:

$$n(T)=n(T_L)+n(T_R)+1$$
$$h(T)=1+\max\{h(T_L),h(T_R)\}$$

بنابراین با تفاضل این دو خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n(T)-h(T) &= n(T_L)+n(T_R)+1-(1+\max\{h(T_L),h(T_R)\}) \\ &= n(T_L)+n(T_R)-(h(T_L)+h(T_R)-\min\{h(T_L),h(T_R)\} \\ &= (n(T_L)-h(T_L))+(n(T_R)-h(T_R))+\min\{h(T_L),h(T_R)\} \end{aligned}$$

کنکور ارشد

(علوم کامپیوتر- دولتی ۹۰)

۱- در یک درخت دودویی غیر تهی، تعداد برگ های درخت برابر L می باشد. تعداد گره های با درجه 2 برابر کدام است؟

۱) $L-1$ ۲) $L+1$ ۳) 2^L ۴) $\left|\log_2^{(L+1)}\right|$

پاسخ: جواب گزینه ۱ است.

$$n_0 = n_2 + 1 \Rightarrow n_2 = n_0 - 1 = L - 1$$

(مهندسی کامپیوتر – دولتی ۸۶)

۲- کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد یک درخت 5 تائی کامل با 95 گره صحیح است؟

(ریشه گره اول است و در هر عمق گره‌ها به ترتیب از چپ به راست در نظر گرفته شوند.)

۱) این درخت 76 برگ دارد و گرهٔ پانزدهم آن پدر گرهٔ 72 ام آن است.

۲) این درخت 76 برگ دارد و گرهٔ چهاردهم آن پدر گرهٔ 72 ام آن است.

۳) این درخت 77 برگ دارد و گرهٔ چهاردهم آن پدر گرهٔ 72 ام آن است.

۴) این درخت 77 برگ دارد و گرهٔ پانزدهم آن پدر گرهٔ 72 ام آن است.

پاسخ: جواب گزینه ۱ است.

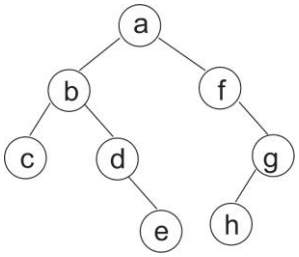
در یک درخت 5 تایی کامل، تعداد برگ ها در درخت با 95 گره، برابر است با:

$$n_0 = n - \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil = 95 - \left\lceil \frac{95-1}{5} \right\rceil = 95 - 19 = 76$$

شماره پدر گره 72 ام، برابر است با:

(علوم کامپیوتر- دولتی ۸۷)

۳- نمایش درخت زیر به کدام صورت درست می باشد؟



۱) (a,b(c,d),e,f(g(h)))
۲) (a(b(c,d),e),f(g(h)))
۳) (a(b(c,d(e),f(g(h)))
۴) (a(b(c,d(,e)),f(,g(h,)))

پاسخ: جواب گزینه ۴ است.

عبارت a(b,) بیانگر این است که b فرزند چپ a است و عبارات a(,b) معرف این است که b فرزند راست a می باشد. با توجه به این موضوع عبارت (a(b(c,d(,e)),f(,g(h,))) معادل درخت داده شده است.

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۷)

۴- با ۴ گره چند درخت دودویی متفاوت (از لحاظ فرم درخت و بدون توجه به داده های آن) می توان ساخت؟

۱) 5
۲) 42
۳) 18
۴) 14

پاسخ: جواب گزینه ۴ است.

$$\frac{\binom{8}{4}}{5}=\frac{\frac{8!}{4!\times 4!}}{5}=\frac{\frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{4!\times 4!}}{5}=\frac{\frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1}}{5}=\frac{70}{5}=14$$

(علوم کامپیوتر- دولتی ۸۶)

۵- خروجی الگوریتم زیر برای یک درخت باینری معادل کدام یک از پیمایش‌های زیر می‌باشد؟

```
void  rco(ptr  p){
  if ( p !=NULL) {
       printf( p-> data );
       rco( p  − > right );
       rco( p  − > left );
     }
}
```

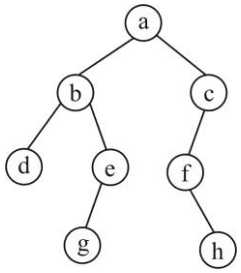
۱) inorder
۲) reverse preorder
۳) reverse postordor
۴) هیچکدام

پاسخ : جواب گزینه ۳ است.

درخت داده شده به صورت "ریشه –راست – چپ" پیمایش می شود که معکوس postorder است.

(علوم کامپیوتر- دولتی ۸۰)

۶- کدام گزینه پیمایش preorder درخت زیر را مشخص می‌کند؟



۱) a b c d d e f g h
۲) d b g e a f h c
۳) a b d e g c f h
۴) d g e b h f c a

پاسخ: جواب گزینه ۳ است.ترتیب پیمایش در preorder ، "ریشه–چپ–راست" می باشد.

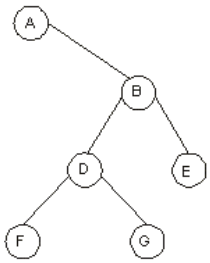
(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۷)

۷- درخت دودوئی T در شکل زیر به صورت آرایه نمایش داده شده است. پیمایش postorder , inorder آن کدام است؟

1	2	3	...	6	7	...	12	13	...
A		B		D	E		F	G	

۱) inorder = AFDGBE , postorder = FGDEBA
۲) inorder = ADFGEB , postorder = FGDEBA
۳) inorder = AFDGBE , postorder = FGDBEA
۴) inorder = AFDBEG , postorder = FGDBEA

پاسخ: گزینه ۱ جواب است. با توجه به آرایه داده شده درخت به صورت زیر است:



پیمایش میانوندی و پسوندی آن برابر است با: inorder = AFDGBE و postorder = FGDEBA

(مهندسی IT – دولتی ۹۰)

۸- نمایش Preorder یک درخت دودویی به صورت (از چپ به راست) XYZABVFOD است. این درخت گره تک فرزندی ندارد. همچنین گره های DOVBZ مجموعه برگهای درخت را تشکیل می دهند. نمایش Postorder درخت کدام گزینه است؟

۱) ZBVAYODFX ۲) ZAYVODFBX

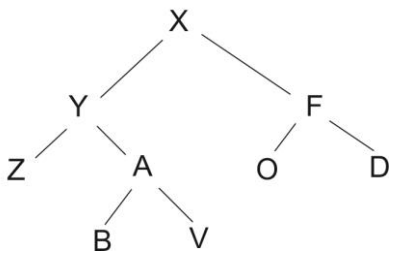
۳) ZAYOFVDBX ۴) BVZAYOFDX

پاسخ: جواب گزینه ۱ است.

می دانیم که ترتیب ملاقات برگ ها در هر سه پیمایش درخت با هم برابر هستند. بنابراین با توجه اینکه برگ ها مشخص هستند، در پیمایش Preorder داده شده، یعنی XYZABVFOD ، ترتیب ملاقات برگها به صورت ZBVOD می باشد که فقط در گزینه یک این ترتیب رعایت شده است.(به طور مثال در گزینه ۲ و۳ گره V زودتر از B ملاقات شده و یا در گزینه ۴، گره B زودتر از Z ملاقات شده است.)

تذکر: اگر پیمایش preorder یک درخت دودویی مشخص باشد و درخت دارای گره های تک فرزندی نباشد، پیمایش postorder آن منحصر به فرد می باشد.

روش دوم: با توجه به پیمایش داده شده، X ریشه است. حال چون درخت گره تک فرزندی ندارد، بنابراین Y در چپ X قرار دارد. (چون اگر Y در راست X باشد، آن وقت X تک فرزندی می شود). به همین روال درخت را رسم می کنیم و شکل زیر حاصل می شود:



حال پیمایش Postorder این درخت برابر است با: **Z B V** A Y **O D** F X

(مهندسی IT – دولتی ۸۸)

۹- تعداد درخت های دودویی که پیمایش های پیش ترتیب (Preorder) و پس ترتیب (Postorder) آنها برابر با رشته های زیر باشد، چقدر است؟

Preorder : a b d e f g c h i j k l
Postorder : e d g f b i h k l j c a

۱) ۱ درخت ۲) ۴ درخت ۳) ۸ درخت ۴) بی نهایت درخت

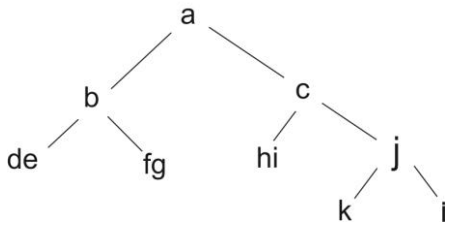
پاسخ: جواب گزینه ۳ است.

با نگاه به پیمایش های داده شده زیر، سه ترکیب دودویی پشت سر هم (de) و (fg) و (hi) در پیمایش preorder وجود دارد که ترکیب عکس آنها یعنی (ed) و (gf) و (ih) در پیمایش postorder موجود است. بنابراین درخت دارای ۳ گره تک فرزندی است. بنابراین تعداد درخت های دودویی که دارای پیمایش های یکسان برابر 2^3 می باشد.

Preorder (VLR) : a b **d e f g** c **h i** j k l
Postorder (LRV): **e d g f** b **i h** k l j c a

روش دوم:

با توجه به پیمایش های داده شده درخت زیر حاصل می شود که وضعیت گره های (de) و (fg) و (hi) نسبت به هم مشخص نمی باشد.



در این حالت ۸ درخت مختلف می توان رسم کرد:

۱- گره e در چپ گره d ، گره g در چپ گره f و گره i در چپ گره h قرار بگیرد.
۲- گره e در چپ گره d ، گره g در چپ گره f و گره i در راست گره h قرار بگیرد.
۳- گره e در چپ گره d ، گره g در راست گره f و گره i در چپ گره h قرار بگیرد.
۴- گره e در چپ گره d ، گره g در راست گره f و گره i در راست گره h قرار بگیرد.
۵- گره e در راست گره d ، گره g در چپ گره f و گره i در چپ گره h قرار بگیرد.
۶- گره e در راست گره d ، گره g در چپ گره f و گره i در راست گره h قرار بگیرد.
۷- گره e در راست گره d ، گره g در راست گره f و گره i در چپ گره h قرار بگیرد.
۸- گره e در راست گره d ، گره g در راست گره f و گره i در راست گره h قرار بگیرد.

فصل ۷

درخت های جستجو

درخت هایی که در این فصل مطالعه می کنیم، عبارتند از:

BST ، قرمز- سیاه، مرتبه آماری ، AVL، 2-3 و B-Tree

درخت جستجوی دودویی (BST)

درختی را جستجوی دودویی(Binary Search Tree) می نامند که :

۱- عناصر زیر درخت چپ، کوچکتر از ریشه باشند.

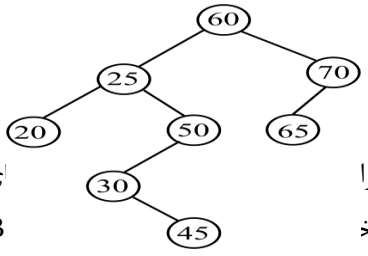
۲- عناصر زیر درخت راست، بزرگ‌تر از ریشه باشند.

۳- زیر درختان چپ و راست ، درختان جستجوی دودویی باشند.

۴- گره با عنصر تکراری نداشته باشد.

مثال

آیا درخت داده شده یک BST را نشان می دهد؟



پاسخ:

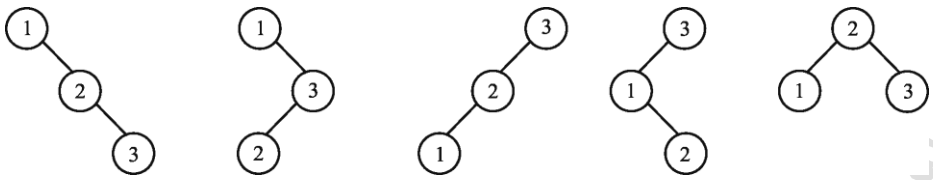
بله، چون تمامی داده های واقع در سمت چپ ریشه، دارا ای واقع در سمت راست ریشه، دارای مقداری بزرگتر از 60 می باشند. همچنین زیر درخ B می باشند.

مثال

به چند حالت می توان با وارد کردن مقادیر 3,2,1 به هر ترتیب دلخواه در یک BST تهی، یک BST با سه گره ساخت؟

پاسخ:

ترتیب های ممکن برای ورود سه عدد برابر 213 , 231 , 312 , 321 , 132 , 123 می باشند که BST ساخته شده به ازای هر ترتیب برابر است با:



ترتیب 213 و231 منجر به یک درخت می شوند. بنابراین 5 درخت متمایز می توان ایجاد کرد. البته می تـوان بـا قـرار دادن مقدار ۳ در رابطه $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ به جواب رسید.

ارتفاع درخت جستجوی دودویی به طور متوسط برابر $\log_2^n$ و در بدترین حالت برابر n می باشد.

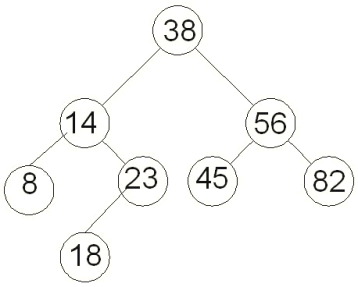
در یک BST ، با n گره متمایز که خاصیت MaxHeap هم دارد، داریم: $h = o(n)$

مثال

در BST که به صورت آرایه نمایش داده شده، آیا می توان به جای عدد 56 عدد 35 قرار داد؟

38 , 14 , 56 , 8 , 23 , 45, 82 , - , - , 18

پاسخ: درخت BST به صورت زیر است:



بنابراین مشخص است که اگر به جای عدد 56 عدد 35 قـرار گیـرد، درخـت BST نخواهـد بـود، چـون عـدد 35 از ریشـه کوچکتر است و نمی تواند در سمت راست ریشه قرار بگیرد.

عملیات بر روی یک BST

می توان عملیاتی چون جستجو،درج،حذف و مرتب سازی را بر روی یک درخت جستجوی دودیی انجام داد.

جستجوی یک عنصر در BST

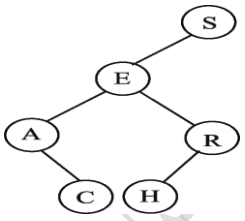
برای جستجوی عنصری در درخت جستجوی دودویی، ابتدا مقدار کلید عنصر مورد نظر با ریشه مقایسه می‌شود، اگر برابر باشد به نتیجه رسیده‌ایم، در غیر این صورت اگر کمتر از مقدار ریشه باشد، زیردرخت چپ و اگر بزرگتر از مقدار ریشه باشد، زیر درخت راست را به صورت بازگشتی جستجو می نماییم.

مثال

یک درخت جستجوی باینری با کلمه "SEARCH" بسازید. تعداد متوسط مقایسه برای پیدا کردن یک کاراکتر در این درخت کدام است؟

پاسخ:

درخت جستجوی ساخته شده با کلمه SEARCH با توجه به ترتیب حروف الفبا به صورت زیر است. ابتدا S در ریشه قرار گرفته و سپس E چون کوچکتر است، در سمت چپ قرار گرفته و به همین روال درخت ساخته می شود.



برای پیدا کردن S به یک مقایسه نیاز داریم و برای پیدا کردن E به دو مقایسه نیاز داریم(ابتدا با S مقایسه شده و چون کوچکتر است به چپ s می‌رویم و با E مقایسه می‌کنیم)، برای پیدا کردن A و یاR به سه مقایسه و برای C و یا H به چهار مقایسه نیاز داریم.بنابراین متوسط تعداد مقایسه‌ها برابر است با:

$$\frac{1+2+3+3+4+4}{6}=\frac{17}{6}=2/83$$

جستجوی موفق(یا ناموفق) در هر درخت دودویی به طور میانگین به اندازه $O(\lg n)$ طول می کشد.

اما جستجو در بدترین حالت، به اندازه $O(n)$طول می کشد.(اگر درخت یک مسیر باشد.)

جستجوی در BST

```
search(t , key){
   while( t != NULL  and   key != t->data)
   {
      if ( key <   t->data)
          t = t->left;
      else
          t = t->right;
   }
```

```
   return  t;
}
```

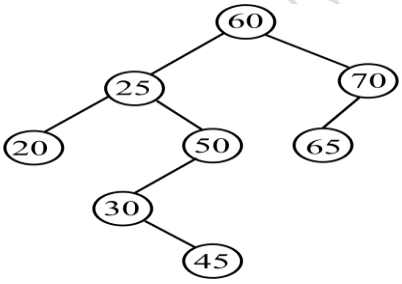
جستجوی بازگشتی در BST

```
search( t , key){
  if (t==NULL  or  key == t->data)
       return t;
  if (key < t – > data)
       return  search(t – > eft , key);
  else
       return  search(t – > right , key);
}
```

دنباله جستجو

در یک BST یک "دنباله جستجوی کلید x "، دنباله ای از برچسب های گره های آن درخت است که در یافتن موفق(یا ناموفق) x ملاقات می شوند. برای مثال، در درخت زیر، دنباله جستجو 45 برابر است با:

< 60 , 25 , 50 , 30 , 45 >



شرط لازم و کافی برای این که یک دنباله از کلیدها، یک دنباله جستجوی درست در یک BST با کلیدهای متمایز باشد، این است که برای هر عنصر این دنباله با کلید x ، همه عناصر بعدی یا از x کمتر باشند و یا بزرگتر.

مثال

فرض کنید اعداد 1 تا 1000 در یک BST ذخیره شده اند. آیا دنباله زیر، می تواند دنباله جستجوی عدد 363 باشد؟

< 925 , 202 , 911 , 240 , 912 , 245 , 363 >

پاسخ: خیر- بعد از ملاقات گره 911 به گره 240 رفته ایم یعنی از 911 به فرزند(و زیر درخت) سمت چپش رفته ایم، اما در ادامه دنباله به 912 بر می خوریم که باید در زیر درخت سمت چپ 911 می بود که تناقض است. با توجه به نکته قبل، شرایط برای 925 برقرار است، چون همه عناصر بعدی از آن کوچکترند. شرایط برای 202 نیز برقرار است، چون همه عناصر بعدی از آن بزرگترند. اما برای 911 برقرار نیست.(بعضی بزرگتر و بعضی کوچکترند)

دنباله زیر، یک دنباله جستجوی درست برای 363 می باشد:

< 2 , 252 , 401 , 398 , 330 , 344 , 397 , 363 >

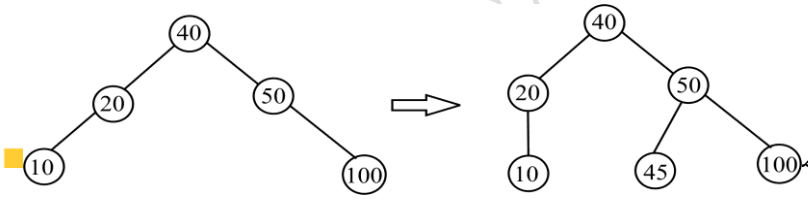
الگوریتم تشخیص درست بودن یک دنباله جستجو از مرتبه $O(n)$ می باشد.

درج یک عنصر به BST

برای اضافه کردن گره ای به درخت جستجوی دودویی، کلید مورد نظر ابتدا با ریشه مقایسه شده و در صورت کوچکتر بودن، به زیر درخت چپ و در صورت بزرگتر بودن به زیر درخت راست اضافه می شود.

مثال

اضافه کردن گره 45 به درخت زیر:



چون 45 از 40 بزرگتر است به سم

درج (یا حذف) در BST با n گره و به ارتفاع h در زمان $o(h)$ انجام می‌گیرد.

برای حذف عناصر تکراری یک لیست، یک درخت جستجوی دودویی با آن عناصر می‌سازیم. به عبارتی BST بهترین ساختمان داده ها برای حذف داده های تکراری می باشد.

مثال

فرض کنید n عنصر An,..,A2,A1 از قبل مرتب شده‌اند (A1<A2<…<An). این عناصر را به ترتیب در درخت BST خالی اضافه می‌کنیم. ارتفاع درخت حاصل کدام است؟

پاسخ: در صورت ساختن یک BST با n عدد که به صورت صعودی مرتب می باشند، درخت اریب به راست با ارتفاع n حاصل می شود.

تابع درج در BST

```
insert( t , k ){
```

```
    p = search(t , k);
    if ( p or !t ){
      n = malloc(sizeof(t));
      n – >data = k;
      n – >left = n  – > right = NULL:
      if (*t)
            if ( k < p  – >data)   p – >left = n;   else  p  – > right = n;
      else  *t = n;
    }
}
```

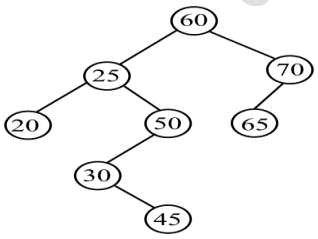
تابع search ، گره درخت دودویی را برای کلید k جستجو می کند. اگر درخت تهی یا k والد باشد، مقدار NULL را برگشت می دهد. در غیر اینصورت، اشاره گری به گره آخر درخت که در طی جستجو مورد استفاده قرار گرفته، برگشت می دهد. عنصر جدید باید به عنوان این گره درج شود.

مرتب سازی به کمک BST

با ایجاد یک درخت جستجوی دودویی با n عدد و سپس پیمایش میانوندی (inorder) درخت، می توان یک لیست مرتب شده از اعداد را بدست آورد. به این روش مرتب سازی، Tree Sort می گویند.

مثال

پیمایش میانوندی BST زیر را بدست آورید؟



پاسخ: در صورت پیمایش LVR درخت داده شده، لیست مرتب شده زیر بدست می آید:

20 , 25 , 30 , 45 , 50 , 60 , 65 , 70

■

مرتبه اجرایی الگوریتم مرتب سازی درختی در بهترین حالت برابر $o(n\lg n)$و در بدترین حالت (BST اریب)، برابر $o(n^2)$ می‌باشد.

با فرض اینکه $< a_1, a_2, ..., a_n >$ دنباله inorder یک BST باشد:

۱- اگر a_i برگ نباشد، یا a_{i-1}در زیر درخت چپ a_i است یا a_{i+1} در زیر درخت راست آن(یا هردو)

۲- اگر a_i دو فرزند داشته باشد، a_{i+1} فرزند چپ ندارد. $(i < n)$

۳- اگر a_i دو فرزند داشته باشد، a_{i-1} فرزند راست ندارد. $(i > 1)$

مثال

اگر عناصر یک BST را به صورت inorder پیمایش کنیم و در داخل یک استک قرار دهیم و سپس عناصر استک را خارج کنیم و یک BST بسازیم، درخت حاصل چه درختی خواهد بود؟

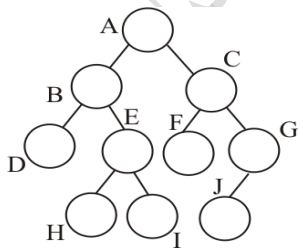
پاسخ:

پیمایش میانوندی BST اعداد را به صورت صعودی مرتب می کند و در صورتی که آنها را در پشته ریخته و سپس آنها را pop کنیم، حاصل نزولی خواهد شد. حال در صورتی که با داده های نزولی یک BST بسازیم، حاصل اریب به چپ خواهد بود.

■

مثال

اگر T یک درخت جستجو باینری به صورت زیر باشد که در هر گره آن یک عدد صحیح ذخیره شده است، چهارمین کوچکترین عنصر آن در کدام گره قرار دارد؟



پاسخ:

نتیجه پیمایش میانوندی BST داده شده DBHEIAFCJG می باشد. به کمک این پیمایش که همواره صعودی است، مشخص می شود که گره E حاوی چهارمین کوچکترین عنصر است.

■

مثال ۸-۱۵ (مهندسی IT – دولتی ۸۹)

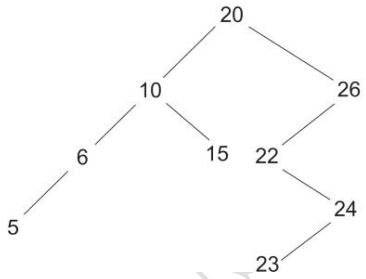
هفتمین کلید در پیمایش preorder یک درخت جستجوی دودویی(BST) که پیمایش postorder آن به شکل زیر است(از چپ به راست)، کدام گزینه است؟

Postorder : 5 , 6 , 15 , 10 , 23 , 24 , 22 , 26 , 20

۱) 26 ۲) 15 ۳) 22 ۴) 24

پاسخ: گزینه ۳ جواب است.

می دانیم که پیمایش میانوندی BST ، کلیدها را به صورت صعودی مرتب می کند. بنابراین پیمایش میانوندی این درخت برابر است با: 5 , 6 , 10 , 15 , 20 , 22 , 23 , 24 , 26 . همچنین می دانیم که با داشتن دو پیمایش از یک درخت دودویی که یکی از آنها میانوندی است، می توان درخت را رسم کرد. این درخت به صورت زیر می باشد:



پیمایش preorder این درخت برابر است با: 20 , 10 , 6 , 5 , 15 , 26 , **22** , 24 , 23

مشاهده می کنید که هفتمین کلید در این پیمایش برابر 22 می باشد.

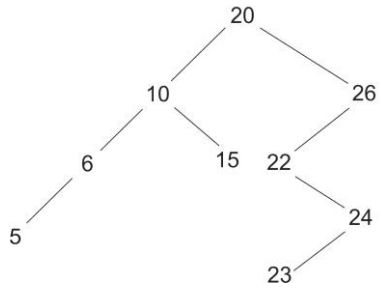
روش دوم:

در BST ، می توان به کمک پیمایش postorder درخت را رسم کرد. با توجه به پیمایش postorder داده شده یعنی 5,6,15,10,23,24,22,26,20 ، آخرین گره یعنی 20 ، ریشه می باشد و اعداد به دو نیمه تقسیم می شود:

الف: اعداد کوچکتر از 20 یعنی 5,6,15,10 که در سمت چپ 20 قرار می گیرند.

ب: اعداد بزرگتر از 20 یعنی 23,24,22,26 که در سمت راست 20 قرار می گیرند.

این روال را برای این دو نیمه تکرار می کنیم. در بین اعداد سمت چپ، آخرین گره یعنی 10 در ریشه قرار گرفته و اعداد 5,6 در چپ آن و عدد 15 در راست آن قرار می گیرد. در سمت راست ریشه نیز عدد 26 در ریشه و اعداد 23,24,22 در چپ آن قرار می گیرند. به همین روال ادامه داده تا درخت زیر حاصل شود:



پیمایش preorder این درخت برابر است با:

20 , 10 , 6 , 5 , 15 , 26 , 22 , 24 , 23

- اگر عناصر دنباله پیمایش سطح ترتیب حاصل از یک BST را در یک درخت خالی درج کنیم، درخت اولیه ایجاد می شود.
- تعداد BST های متفاوت با n گره و برچسب های 1 تا n که دارای ترتیب یکسانی در هر دو روش postorder و inorder هستند، برابر عدد n ام کاتالان می باشد.
- در یک BST ، با داشتن دنباله پیمایش های preorder یا postorder یا level order ، می توان آن را به طور یکتا ساخت. (تذکر: با داشتن پیمایش inorder یک BST نمی توان درخت را به صوت یکتا ساخت، چون BST های متفاوتی می توان مثال زد که پیمایش inorder آنها با هم برابر باشد.)

پیدا کردن عنصر کمینه در BST

عنصری که کلید آن در BST ، مینیمم است را می توان با دنبال کردن اشاره گرهای فرزندان چپ از ریشه تا رسیدن به NULL پیدا کرد. روال زیر اشاره گری به عنصر مینیمم در زیر درخت مشتق شده از t را بر می گرداند:

```
min( t ){
  while ( t ->left !=NULL )
       t = t -> left;
  return  t;
}
max( t ){
  while ( t -> right != NULL )
       t = t -> right;
  return  t;
}
```

مرتبه اجرایی روال های min یا max روی یک درخت BST با ارتفاع h برابر $O(h)$ می باشد.

حذف یک گره از BST

پس از یافتن گره مورد نظر برای حذف، یکی از سه حالت زیر ممکن است رخ دهد:

۱- اگر گره فاقد فرزند باشد، به سادگی حذف شده و نیازی به تنظیم درخت نمی‌باشد.

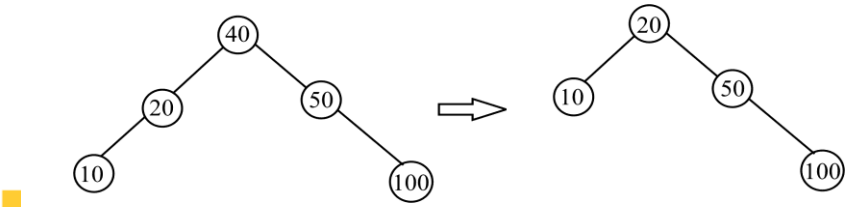
۲- اگر گره فقط دارای یک فرزند باشد، فرزند آن به طرف بالا در درخت منتقل می‌شود.

۳- اگر گره دارای دو فرزند باشد، گره بعدی یا قبلی آن در پیمایش میانوندی جای آن را می‌گیرد. به عبارتی عنصر حذف شده، با مقدار بزرگ‌ترین عنصر زیر درخت چپ یا کوچکترین عنصر زیر درخت راست جایگزین می‌شود.

در BST غیر اریب، می‌توان کوچکترین عنصر را با مرتبه $o(\log n)$ حذف کرد.

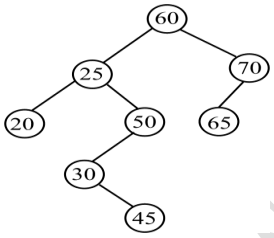
مثال

برای حذف گره با داده 40 از درخت جستجوی زیر،گره 20 یا 50 می توانند جایگزین شوند، که ما گره 20 را جایگزین کـرده ایم:

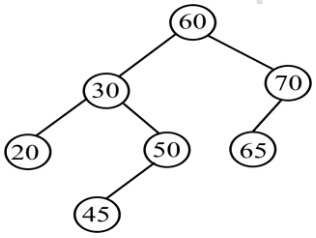


مثال

گره با داده 25 را از درخت زیر حذف کنید.



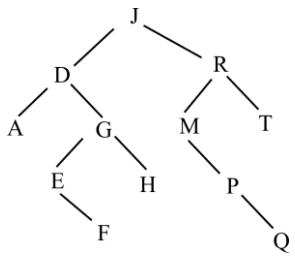
پاسخ: برای حذف گره با داده 25 ، می توان گره 20 یا 30 را جایگزین کرد. (در این مثال گره 30)



تذکر: در واقع گره 20 یا 30 ، گرههای قبل و بعد از گره 25 در پیمایش میانوندی درخت می باشند.

مثال

بعد از حذف گره D در درخت BST زیر، کدام گره جایگزین آن می‌شود؟



پاسخ: گره E یا گره A.

بررسی BST بودن

تابع زیر بررسی می کند که آیا درخت دودویی t با کلیدهای صحیح و متمایز یک BST است:

(min=-32768, max=32767)

```
f (tree *t , int  min , int  max){
   if (t == NULL)
        return  TRUE;
   if ( t ->key <  min   ||   t->key > max )
        return   FALSE;
   return    f (t->left , min, t->key-1)  &&  f (t->  right ,t->key+1, max)
}
```

چاپ داده های در یک محدوده خاص

تابع زیر، کلیه کلیدهای واقع در محدوده خاص($a \le k \le b$)در یک BST با ریشه t را چاپ می کند:

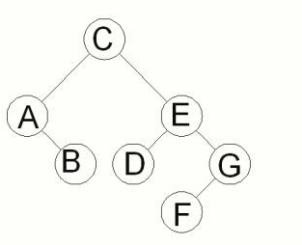
```
f (t , a , b){
  if ( t->data >= a  &&  t->data <= b)
      cout <<  t->data;
  if ( t->data >= a  &&  t->left != null )
      f ( t->  left  , a , b);
  if ( t->data <= b  &&  t->right != null)
     f ( t->right , a , b);
}
```

اگر h ارتفاع درخت و m تعداد جواب باشد، زمان اجرای این الگوریتم $o(m+h)$ است. چون حداکثر تعداد دفعاتی که این تابع صدا زده می شود و چیزی چاپ نمی شود از $o(h)$ است.

روش دوم: می توان دو عنصر a وb را در درخت پیدا کرد. سپس با شروع از a و تا رسیدن به b (m مرحله)، عمل a = Tree-Successor (a) را انجام دهیم و آن را به مجموعه جواب نیز اضافه کنیم.

مثال

چه تعداد از حالتهای درج عناصر A تا F در یک BST تهی، درخت مشابه زیر را تولید می کنند؟



پاسخ: دنباله دارای هفت خانه است که باید با C شروع شود. سپس دو خانه از شش خانه باقی مانده به $\binom{6}{2}$ حالت برای A و B در نظر گرفته می شود. پس از آن، عناصر باقی مانده به یکی از سه ترتیب زیر در چهار خانه باقی مانده، قرار می گیرند.

{E,D,G,F} , {E,G,D,F} , {E ,G,F,D}

در نتیجه تعداد کل حالت ها برابر است با:

$$\binom{6}{2}\times 3 = 15\times 3 = 45$$

■

مثال

تعداد درخت های دودویی جست و جویی که می توان با 10 کلید داده شده مجزا از هم ساخت به طوری کـه اخـتلاف عمـق برگ‌های آن درخت حداکثر 1 باشد، چند تاست؟

پاسخ:

چون اختلاف عمق برگها باید حداکثر یک باشد، درخت تا سطح سوم پر است و 7 گره دارد و 3 گره دیگر آن بایـد در سـطح چهارم قرار گیرد. در سطح چهارم 8 مکان وجود دارد و به $\binom{8}{3}$ یعنی 56 روش می توان این 3 گره را در این محـل هـا قـرار داد.

■

تعداد BST که می توان با n کلید داده شده مجزا از هم ساخت به طوری که اختلاف عمق برگ‌های درخـت حـداکثر 1 باشد، برابر $\binom{k}{n+1-k}$ می باشد به طوری که $k = 2^{\lfloor \log n \rfloor}$.

در واقع k بزرگترین عدد توان دو است که از n کوچکتر است.

با فرض اینکه P(T) ، مجموع طول مسیرهای BST به نام T باشد، آنگاه:

$$P(T) = P(T_R) + P(T_L) + n - 1$$

همچنین می توان نشان داد که میانگین عمق یک گره در T برابر $\frac{1}{n}P(T)$ می باشد.

با فرض اینکه P(n) بیانگر مجموع طول مسیرهای تمام BST های ساخته شده با n گره باشد، خواهیم داشت:

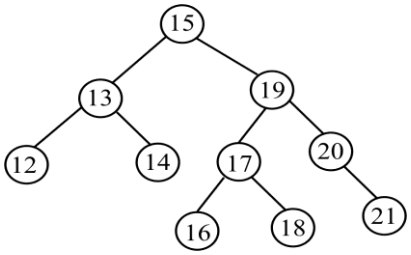
$$P(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(P(i) + P(n-i+1) + n - 1)$$

می توان P(n) را به صورت $P(n) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}P(k) + \theta(n)$ نیز نوشت.

spin چپ یک BST ، مسیری از ریشه به گره ای با کوچکترین کلید می باشد. بنابراین تنها شامل یالهای چپ می باشد.

درخت AVL

درخت AVL یک درخت جستجوی دودویی است که حداکثر اختلاف ارتفاع دو زیر درخت چپ و راست آن برابر یک بوده($|h_R - h_L| \le 1$) و این خاصیت در هر یک از زیر درختان نیز برقرار است. درخت زیر یک AVL می باشد:



تذکر: در درخت AVL ریشه را در سطح صفر فرض می‌کنیم. بنابراین ارتفاع درخت بالا 3 است.

حداقل تعداد گره های مورد نیاز برای ساختن AVL

اگر تعداد عناصر یک درخت AVL کمینه باشد، تعداد عناصر زیر درخت های آن هم باید کمینه باشد. بنابراین حداقل تعداد گره مورد نیاز برای ساختن یک درخت AVL با ارتفاع h برابر است با:

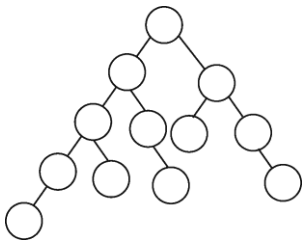
$$G_h = G_{h-1} + G_{h-2} + 1$$
$$G_0 = 1, G_1 = 2$$

به طور نمونه برای ساختن یک AVL با ارتفاع دو، حداقل نیاز به چهار گره می باشد:

$$G_2 = G_1 + G_0 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

مثال

شکل زیر یک درخت AVL با ارتفاع چهار، با حداقل تعداد گره ها یعنی 12 را نشان می‌دهد:



- حداکثر ارتفاع یک درخت AVL با n گره از $O(\log n)$است.
- مرتبه اجرایی هر یک از اعمال "جستجو، حذف، درج" در AVL ، برابر $O(\log n)$ می باشد.
- در سری فیبوناچی داریم $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ، پس با توجه به جدول زیر مشخص می شود که:

$$G_n = F_{n+3} - 1$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	.....
F	0	1	1	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	
G	**1**	**2**	**4**	**7**	**12**	**20**	33	54	88	

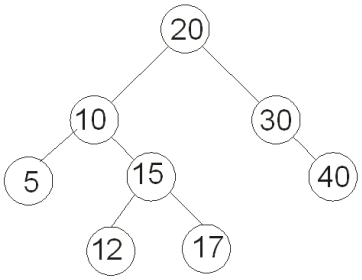
مثال

با کلیدهای 3و2و1 چه تعداد درخت AVL می توان ساخت؟

پاسخ: فقط یک درخت که 2 در ریشه و 1 در چپ آن و 3 در راست آن باشد.

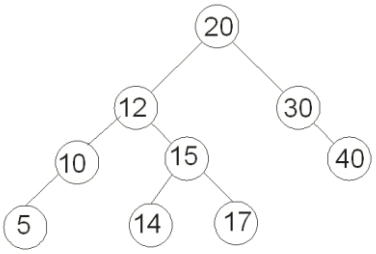
مثال

عنصر با کلید 14 را به درخت AVL زیر اضافه کنید.



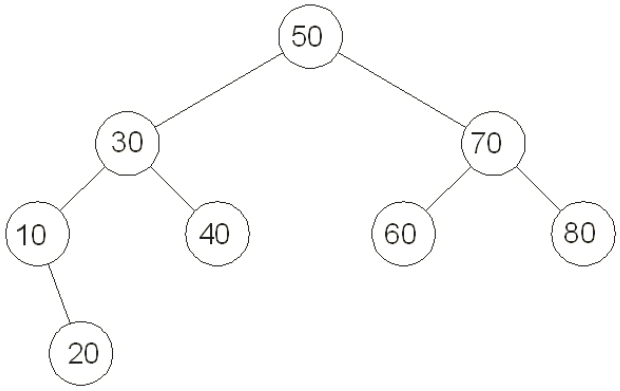
پاسخ:

با توجه به اینکه 14 از 20 کوچکتر و از 10 بزرگتر و از 15 کوچکتر و از 12 بزرگتر است، در سمت راست 12 اضافه می شود. از آنجا که در AVL حداکثر اختلاف ارتفاع زیر شاخه های چپ و راست برای هر گره باید یک باشد، بعد از اضافه شدن 14 ، ارتفاع زیر شاخه چپ کلید10 برابر 1 و ارتفاع زیر شاخه راست برابر 3 می شود که توازن آن بهم می خورد. بنابراین با توجه به قوانین چرخش، کلید 12 به جای 10 می رود و 10 در چپ 12 قرار می گیرد. سپس 14 به چپ 15 می رود. درخت نهایی به صورت زیر است:



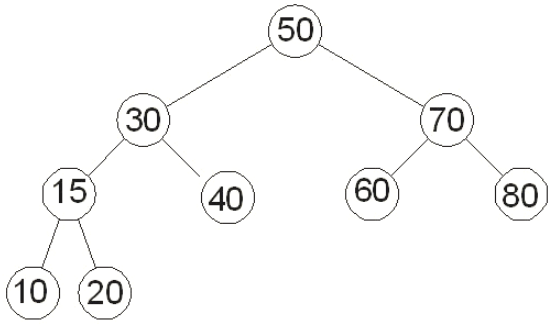
مثال

عنصر با کلید 15 را به درخت AVL زیر اضافه کنید.



پاسخ:

در درخت AVL باید حداکثر اختلاف ارتفاع چپ و راست برابر یک باشد. عدد 15 به سمت چپ 20 اضافه می شود و چون اختلاف عمق گره 10 بیش از یک می شود، 15 به جای 10 رفته و 10 در چپ 15 و 20 در راست 15 قرار می گیرد. شکل نهایی به صورت زیر است:



درخت قرمز-سیاه

درخت قرمز- سیاه یک BST است که با اضافه کردن یک بیت به هر گره (معرف رنگ قرمز یا سیاه)، کاری می کنیم که همیشه ارتفاع درخت حداکثر حدود $2\log n$ شود. در این درخت، هر یک از اعمال درج ، حذف، جستجو و اعمال دیگری که در BST قابل انجام است، می توان در زمان لگاریتمی انجام داد. در یک درخت قرمز- سیاه:

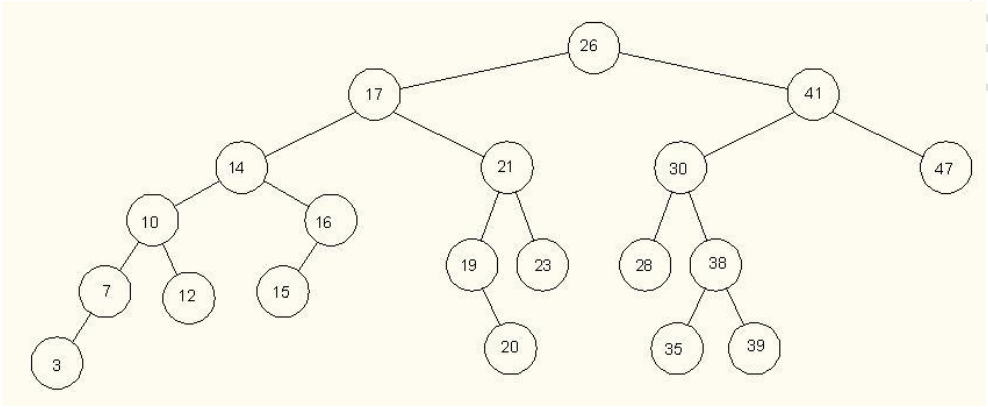
۱- رنگ ریشه سیاه است.(این شرط ضروری نیست)

۲- رنگ برگ ها سیاه است.

۳- پدر یک گره قرمز، حتما سیاه است.

۴- به ازای هر گره داخلی x ، تعداد گره های سیاه(بجز خود x) موجود که از x تا هر یک از نواده برگ تهی آن برود، برابر است. (به این تعداد، ارتفاع سیاه x می گوییم و با bh(x) نشان می دهیم.)

شکل زیر یک درخت قرمز- سیاه را نشان می دهد:



حداکثر ارتفاع یک درخت قرمز- سیاه که دارای n گره داخلی باشد، برابر $2\log(n+1)$ است.

ارتفاع یک گره درخت قرمز- سیاه با n گره داخلی $O(\log n)$ است.

با فرض اینکه p[x] معرف پدر گره x باشد، uncle[x] یعنی **عموی** گره x ، به صورت زیر قابل بیان است:

```
if   p[x] = right[p[p[x]]]   then
     uncle[x] ← left[p[p[x]]]
else
    uncle[x] ← right[p[p[x]]]
```

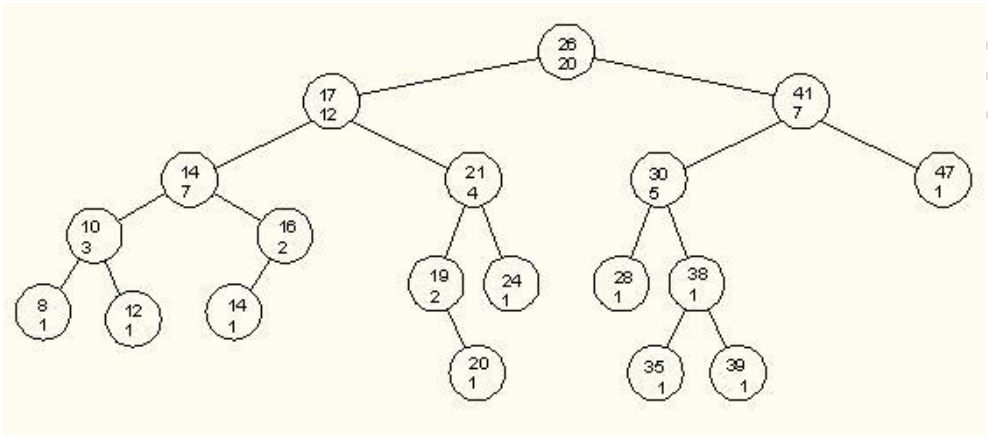
درخت مرتبه آماری

درخت مرتبه آماری، یک درخت قرمز- سیاه است که مجموعه ای از n عنصر را که به صورت پویا در آن درج یـا از آن حـذف می شوند، طوری پیاده سازی می کند که اعمال مرتبه آماری را در هر زمان بتوان در $O(\log n)$انجام داد. (منظور از اعمال مرتبه آماری، یافتن مرتبه یک عنصر یا یافتن عنصری با مرتبه خاص می باشد.)

هر گره در درخت مرتبه آماری، علاوه بر اطلاعات مربوط به خاصیت قرمز- سیاه ، یک مولفه size[x] هم دارد که تعداد عناصر موجود در زیر درختی به ریشه x را نشان می دهد. یعنی:

size[x] = size[left[x]] + size[right[x]] + 1

شکل زیر یک درخت مرتبه آماری را نشان می دهد:



دو رویه استفاده شده بر روی درخت مرتبه آماری

۱-رویه select(x,i) ، عنصری با i امین کلید بین عناصر زیر درختی به ریشه x را به دست می آورد.

۲- رویه rank(T,x) ، مرتبه عنصر x را در درخت مرتبه آماری T به دست می آورد.

```
select ( x , i )
{
  r = size[left[x]]+1;
  if (  r == i )
      return  x;
  else  if ( r > i)
            return  select ( left[x] , i );
        else
            return   select( right[x] , i-r
```

```
rank(T,x)
{
  r = size[left[x]]+1;
  y = x;
  while ( y != root[x] )
     if  (y == right[p[y]] )
         r = r + size[left[p[y]]] + 1;
     y = p[y];
   return  r;
```

} 	); }

تحقیق: یکی دیگر از گسترش های درخت قرمز- سیاه،**درخت بازه** است. درباره این درخت تحقیق کنید.

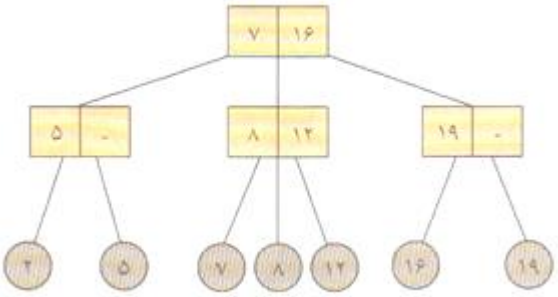
درخت ۳-۲

یک درخت ۳-۲ ، درختی است که هر گره داخلی یا ۲ یا ۳ فرزند دارد و همه برگها در عمق یکسان هستند. (درختی کاملا متوازن). عناصر در این درخت، به ترتیب کلیدشان از چپ به راست فقط در برگها قرار دارند و فرض می شود که کلید هر عنصر تک است. یک درخت ۳-۲ با یک عنصر، تنها یک برگ است.

در درخت ۳-۲، در هر گره داخلی x ، دو مقدار ذخیره می شود:

۱- کلید کوچکترین عنصر در زیر درخت دوم x

۲- کلید کوچکترین عنصر در زیر درخت سوم x (البته در صورت وجود)



یک درخت ۳-۲ به ارتفاع h ، حداقل 2^h و حداکثر 3^h برگ دارد و همین تعداد عنصر را می تواند در خود ذخیره کند.

به عبارتی اگر h ارتفاع یک درخت ۳-۲ با n عنصر باشد، داریم:

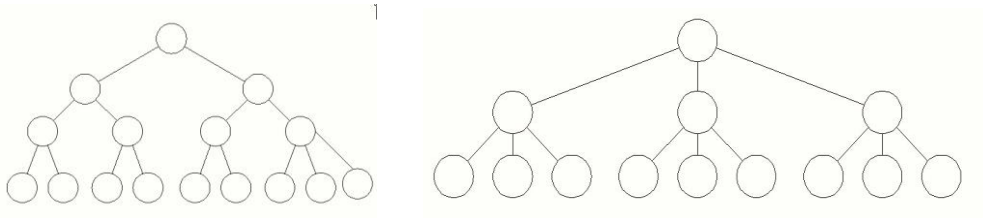
$$\left|\log_3^n\right| \le h \le \left\lfloor \log_2^n \right\rfloor$$

هر یک از اعمال "درج، حذف و جستجو" در درخت ۳-۲ از $O(\log n)$ می باشند.

مثال

یک درخت ۳-۲ با ۹ برگ، چه تعداد گره داخلی دارد؟

حل: این درخت دو حالت می تواند داشته باشد. با ۴ گره داخلی و با ۷ گره داخلی:



درخت بی (B-Tree)

B-Tree ها، درخت های جستجوی متوازنی هستند که برای کار روی رسانه ها با دسترسی مستقیم طراحی شده اند. این درخت به منظور بازیابی، درج و حذف رکوردها از یک فایل بزرگ طراحی شده است. ارتفاع این درخت برابر $O(\log n)$ می باشد. درخت بی عمدتا برای ذخیره داده ها بر روی حافظه خارجی مورد استفاده قرار می گیرد. B-tree ها شبیه درختهای قرمز-سیاه می باشند، اما در مینیمم کردن اعمال I/O دیسک بهتر عمل می کنند. تفاوت B-tree ها با درخت های قرمز-سیاه در این است که گره های B-tree ممکن است فرزندان زیادی داشته باشند. درخت بی را می توان مبتنی بر دو درخت زیر طراحی کرد:

۱ - درخت دودویی جستجو ۲– درخت ۳-۲

یک B–TREE با درجه t یک درخت جستجو با ویژگی های زیر است:

۱- برگها همه در یک سطح قرار دارند و رکوردهای ذخیره شده در هر برگ به ترتیب کلیدشان از چپ به راست قرار دارند.

۲- هر گره به غیر از ریشه باید حداقل t-1 و حداکثر 2t-1 ، **کلید** داشته باشد.

۳- هر گره داخلی به غیر از ریشه حداقل t و حداکثر 2t ، **فرزند** دارد.

۴- در درخت غیر تهی، ریشه حداقل یک کلید دارد.

۵- گره پر دقیقا شامل 2t-1 کلید است.

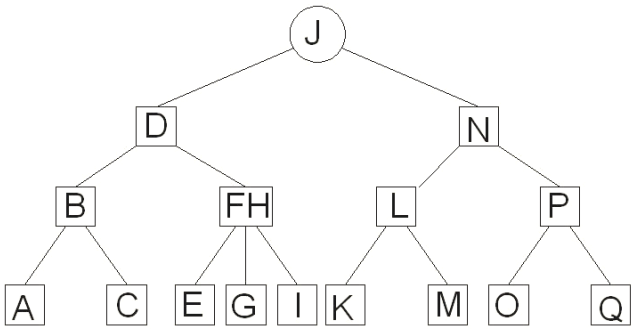
۶- هر گره داخلی شامل k+1 اشاره گر به فرزندانش است. (k تعداد کلیدهای گره)

تذکر: کمترین مقدار برای t برابر 2 می باشد.

مثال

درخت زیر یک B-Tree با درجه مینیمم t=2 است. هر گره به غیر از ریشه حداقل 1 و حدکثر 3 کلید دارد.

هر گره داخلی، 2 ، 3 و یا 4 فرزند می تواند داشته باشد.



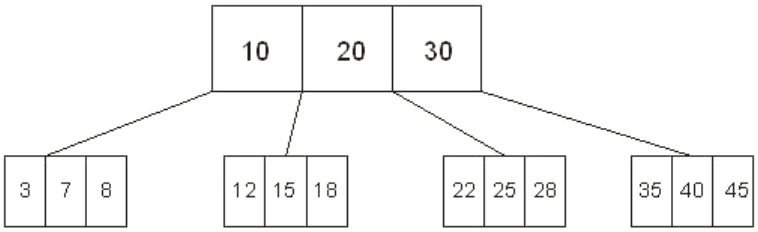
حداکثر تعداد کلیدها در B-Tree با درجه t و ارتفاع h برابر است با:

$$[1+(2t)+(2t)^2+...+(2t)^h]\times(2t-1)=\frac{(2t)^{h+1}-1}{2t-1}\times(2t-1)=(2t)^{h+1}-1$$

تعداد کلیدها در B-Tree با درجه 2 و ارتفاع h حداکثر $4^{h+1}-1$ می باشد.

مثال

شکل زیر یک B-Tree با t=2 و h=1 را نشان می دهد که دارای حداکثر تعداد کلید یعنی 15 است.



حداقل تعداد کلیدها در B-Tree با درجه t و ارتفاع h برابر است با:

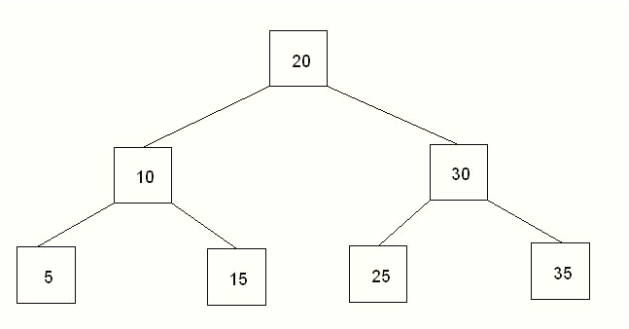
$$1+(2+2t+2t^2+...+2t^{h-1})(t-1)=1+2(\frac{t^h-1}{t-1})(t-1)=2t^h-1$$

ریشه حداقل یک کلید دارد و بقیه گره ها حداقل t-1 کلید دارند. بنابراین حداقل 2 گره در عمق 1 ، 2t گره در عمق 2 ، $2t^2$ گره در عمق 3 و ... و $2t^{h-1}$ گره در عمق h وجود دارند.

تعداد کلیدها در B-Tree با درجه 2 و ارتفاع h حداقل $2^{h+1}-1$ می باشد.

مثال

شکل زیر یک B-Tree با t=2 وh=2 را نشان می دهد که دارای حداقل تعداد کلید یعنی 7 است.



در یک B-Tree با n کلید و ارتفاع h و درجه t داریم: $h \le \log_t^{(n+1)/2}$

پیاده سازی درخت بی مبتنی بر درخت ۳-۲

یک درخت بی از مرتبه m یک درخت جستجوی m تایی با ویژگی های زیر است:

۱ – ریشه، یا برگ است یا حداقل دو فرزند دارد.

۲ – هر گره، غیر از ریشه و برگ ها، حداقل $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ و حداکثر m فرزند دارد.

۳ – یک گره داخلی دارای $m-1$ کلید و m اشاره گر است.

۴ – برگه ها همه در یک سطح قرار دارند و رکوردهای ذخیره شده در هر برگ به ترتیب کلیدشان از چپ به راست قرار دارند.

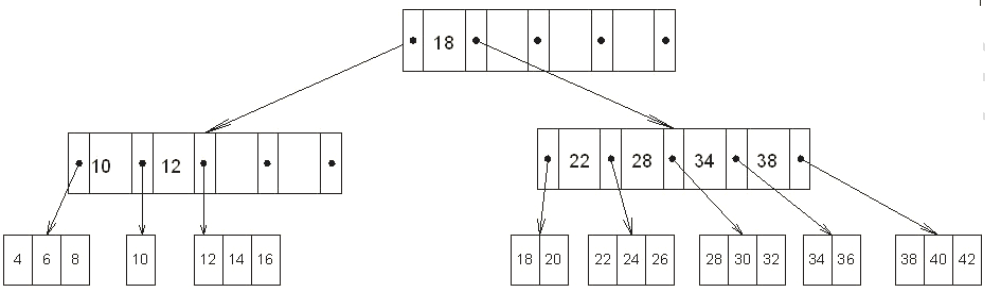
۵ – در هر برگ با توجه به اندازه هر رکورد، از 1 تا حداکثر k رکورد قرار می گیرد.

تذکر: معمولا مقادیر m و k به گونه ای تعیین می شوند که اندازه هر گره داخلی و هر برگ برابر یک بلوک از دیسک باشد و بتوان با یکبار دسترسی آن را به حافظه اصلی خواند.

تذکر: اشاره گرها آدرس بلوک بر روی دیسک هستند.

مثال

شکل زیر یک درخت بی از مرتبه پنج را نشان می دهد که در هر بلوک برگ، حداکثر سه رکورد جای می گیرد. (m=5, k=3)



درخت ۲-۳ یک درخت بی از مرتبه ۳ است.

اگر j تعداد گره های موجود در مسیر بین ریشه و برگ ها باشد، اعمال جستجو و حذف حداکثر j بار و عمل درج حداکثر j+1 بار نیاز به دسترسی به دیسک دارد.

کنکور ارشد

(مهندسی IT- آزاد ۸۶)

۱- می خواهیم با استفاده از اعداد 14,12,20,15 به هر ترتیب دلخواه در یک درخت تهی دودویی جستجو، یک درخت دودویی جستجو با 4 گره بسازیم. در این صورت تعداد درخت های دودویی جستجوی ممکن برابر است با:

۱) 16 ۲) 12 ۳) 14 ۴) 8

پاسخ: گزینه ۳ جواب است.

می توان با قرار دادن مقدار 4 به جای n در رابطه $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ به جواب رسید.

$$\frac{1}{5}\times\binom{8}{4}=\frac{1}{5}\times\frac{8!}{4!\times4!}=\frac{1}{5}\times\frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4!\times4!}=\frac{1}{5}\times\frac{8\times7\times6\times5}{4!}=14$$

(علوم کامپیوتر- دولتی ۹۰)

۲- فرض کنید n عدد در بازه $[1,\log n]$ داده شده باشند. ارتفاع درخت جستجوی دودویی(h) ، برای این اعداد چه وضعیتی دارد؟ (از هر عدد حداقل یک نمونه وجود دارد.)

۱) $\log n \le h \le n$ ۲) $\log^2 n \le h \le n$

۳) $\log n \le h \le \log^2 n$ ۴) $\log(\log n) \le h \le \log n$

پاسخ: جواب گزینه ۴ است.

ارتفاع BST برای یک درخت اریب برابر با تعداد اعداد و برای یک درخت متوزان برابر لگاریتم تعداد اعداد است. بنابراین اگر logn عدد داشته باشیم، داریم:

$$\log(\log n) \le h \le \log n$$

(علوم کامپیوتر- دولتی ۸۴)

۳- در یک درخت جستجوی باینری با n گره ، تعداد مقایسه برای جستجوی یک عنصر حداکثر برابر است با :

۱) $O\left(\frac{n}{2}\right)$ ۲) $O(n)$ ۳) $O(\sqrt{n})$ ۴) $O(\log n)$

پاسخ: جواب گزینه ۲ است.

یک درخت BST اگر اریب باشد، در بدترین حالت عنصر مورد جستجو در برگ است و برای پیدا کردن آن به n مقایسه نیاز می باشد.

(مهندسی IT – دولتی ۸۹)

۴- فرض کنید 100 کلید 1 تا 100 را به یک درخت جستجوی دودویی اضافه کرده ایم. ترتیب اضافه شدن کلیدها مشخص نیست، اما احتمال تمام حالات ترتیب های اضافه شدن کلیدها(تمام Permutation های ممکن یک تا صد) با هم برابر است. با چه احتمالی در روند اضافه شدن کلیدها به درخت، کلید 4 و کلید 9 با هم مقایسه می شوند، در صورتی که اولین کلید اضافه شده کلید 43 باشد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{43}{100}\times\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: جواب گزینه ۴ است.

چون طبق صورت سئوال، ابتدا 43 وارد شده است، بنابراین 43 در ریشه و اعداد 4 و 9 هر دو در سمت چپ درخت قرار می گیرند. حال اگر دو عدد 4 و9 زودتر از چهار عدد بین آنها (یعنی 5,6,7,8) به درخت اضافه شوند، حتما با یکدیگر مقایسه می شوند. احتمال این حالت برابر $\frac{2}{6}$ می باشد.(عدد 2 در صورت به علت تعداد اعداد 4 و 9 و عدد 6 در مخرج به علت کل اعداد از 4 تا 9 می باشد.)

تذکر: وقتی4 و9 با یکدیگر مقایسه نمی شوند، که یکی از اعداد بین آنها، قبل از آنها به درخت اضافه شود.

(مهندسی IT – دولتی ۸۸)

۵- تابع زیر بررسی می کند که آیا یک درخت دودویی با کلیدهای صحیح (int) و متمایز یک درخت جستجوی دودویی است یا خیر؟ محل های خالی A تا D کدام گزینه است؟

```
bool  ISBST (tree  *t){  return  ISBST (t, MININT, MAXINT); }
int  ISBST (tree  *t , int  min , int  max){
 if (t==null)
     return TRUE;
 if (t->key < min  ||  t->key> max)
    return  FALSE;
 return  ISBST (t->leftchild, A, B) &&  ISBST (t-> rightchild , C,D)
}
```

۱) A = min , B = t->key-1, C=t->key+1 , D=max

۲) A=min , B=t->key+1, C=t->key-1 , D=max

۳) A= t->key+1 , B=min, C=max , D= t->key-1

۴) A= t->key-1 , B=min, C=max , D= t->key+1

پاسخ: جواب گزینه ۱ است.

در BST ، کلید هر گره از همه کلیدهای گره های زیر درخت چپ بزرگتر و از همه کلیـدهای زیـر درخـت راسـت کـوچکتر است. الگوریتم ISBST ، چک می کند که آیا درخت با آدرس ریشه t یک BST است یا خیر. برای ایـن کـار تـابع ISBST دیگری با سه ورودی را صدا می کند که کمترین و بیشترین مقدار ممکن برای یک متغیر از نـوع int را عـلاوه بـر t بـا تـابع ارسال می کند. (min=-32768, max=32767)

این تابع به صورت بازگشتی سمت چپ و سمت راست را بررسی می کند:

ISBST(t->left , min , t->key-1) **&&** **ISBST**(t->right , t->key+1 , max)

قسمت اول، این موضوع را بررسی می کند که در سمت چپ گره t ، مقدار کلیدها حداقل برابـر min و حـداکثر یـک واحـد کمتر از مقدار کلید گره t باشند.

قسمت دوم، این موضوع را بررسی می کند که در سمت راست گره t ، مقدار کلیدها حداقل یک واحد بیشـتر از مقـدار کلیـد گره t و حداکثر برابر max باشند.

(مهندسی IT – دولتی ۸۸)

۶- حداکثر تعداد کلید در یک B.Tree با مینیمم درجه ی نود t و ارتفاع h چقدر است؟

۱) $(2t)^{h+1}$ ۲) $(2t)^{h+1}-1$ ۳) $2t^{h}-1$ ۴) $2t^{h+1}-1$

حل: گزینه ۲ درست است.

فصل ۸

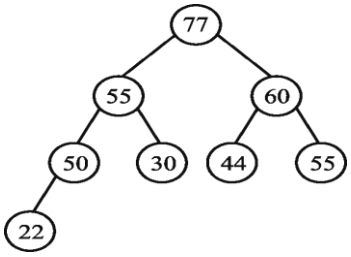
درخت های Heap

در این فصل درختهای Heap، Deap، treap، heap و جمله ای وheap فیبوناچی را بررسی می کنیم.

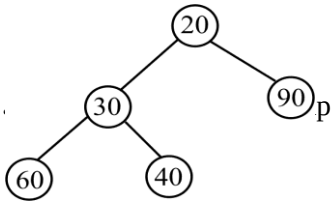
هرم ها (HEAPS)

دو نوع Heap دودویی وجود دارد:

۱- **Max-Heap** : یک درخت دودویی کامل که مقدار کلید هر گره آن بزرگتر یا مساوی مقدار کلیدهای فرزندانش باشد.



۲- **Min-Heap** : یک درخت دودویی کامل که مقدار کلید هر گره آن کوچکتر یا مساوی مقدار کلیدهای فرزندانش باشد.



- ریشه Maxheap حاوی بزرگترین کلید و ریشه p است.
- ارتفاع یک هرم با n عنصر برابر $\lfloor \lg n \rfloor$ است.
- تعداد برگ های یک هرم با n عنصر برابر $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ است.
- در یک هرم با n گره، عمق یک گره در درایه i ، برابر $\lfloor \lg i \rfloor$ است. $(1 \le i \le n)$
- بیشترین تعداد گره های با ارتفاع h در یک هرم با n عنصر برابر است با: $\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$
- کوچکترین عنصر در یک MaxHeap با عناصر متمایز، برگ است. (زیرا در غیر اینصورت دارای فرزند است و باید از آنها بزرگتر باشد، که با "کوچکترین" بودن در تناقض است.)

- کوچکترین عنصر در یک MaxHeap با عناصر متمایز را می توان با $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ مقایسه و در زمان $O(n)$ پیدا کرد.

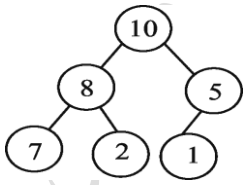
(چون این عنصر در برگ قرار دارد و تعداد برگها نیز برابر $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ می باشد.)

- بزرگترین عنصر در یک MinHeap با عناصر متمایز را می توان با $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ مقایسه پیدا کرد.
- m امین بزرگ ترین عنصر در یک MaxHeap (یا m امین کوچک ترین عنصر در MinHeap)، می تواند در یکی از خانه های A[2] تا $A[2^m - 1]$ قرار بگیرد. $(m > 1)$

مثال

یک MaxHeap با N عنصر متمایز را در نظر بگیرید که با یک آرایه پیاده سازی شده است. چهارمین بزرگترین عنصر در کدام یک از درایه ها می تواند قرار بگیرد؟

حل: چهارمین بزرگترین عنصر می تواند در هر یک از موقعیت های 2 تا 15 قرار بگیرد. به طور مثال در درخت MaxHeap زیر، چهارمین بزرگترین عنصر (مقدار 5) در موقعیت 3 قرار دارد:



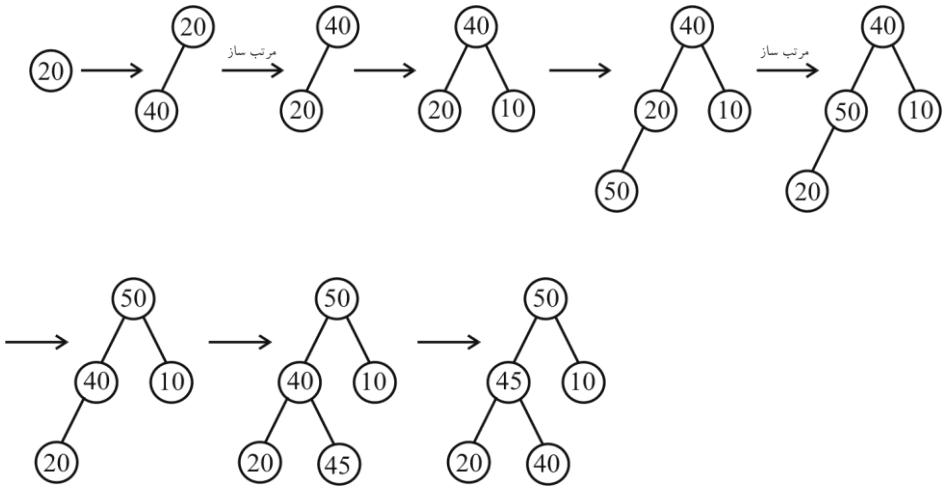
- کوچکترین عددی که می تواند در آخرین سطح یک MinHeap با اعداد متمایز 1 تا n قرار بگیرد، برابر $\lfloor \log n \rfloor + 1$ می باشد.
- بزرگترین عددی که می تواند در آخرین سطح یک MaxHeap با اعداد متمایز 1 تا n قرار بگیرد، برابر $n - \lfloor \log n \rfloor$ می باشد.
- در heap حاوی n گره به عمق d، به ازای هر j کوچک تر از d، تعداد 2^j گره به عمق j وجود دارد. (n توانی از 2 است)
- رابطه بازگشتی $H(n) \le H(\frac{2n}{3}) + 1$، ارتفاع یک هرم با n گره را نشان می دهد. چون زیر درخت چپ هرم حداکثر $\frac{2n}{3}$ گره دارد.

درج در درخت Heap

در heap ، درخت از چپ به راست در هر سطح پر شده، سپس سطح بعدی پر می‌شود. وقتی عنصر جدیدی در درخت وارد می‌شود، ابتدا در سطحی که هنوز به طور کامل پر نشده در چپ ترین جای خالی قرار می‌گیرد، سپس عمل مرتب‌سازی درخت(ReHeap) صورت می‌پذیرد و گره در پایین‌ترین سطح تا حد امکان با گره پدرش جا به جا می‌شود.

مثال

ساختن یک MaxHeap با ورود مقادیر 45 , 50 , 10 , 40 , 20 (از چپ به راست) :

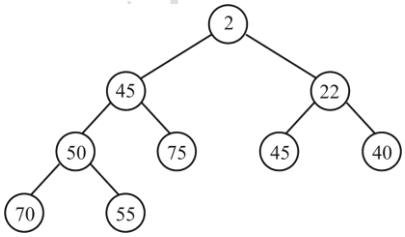


مثال

با ورود مقادیر زیر یک درخت MinHeap بسازید.

2 , 50 , 45 , 70 , 75 , 22 , 40 , 55 , 45

حل:



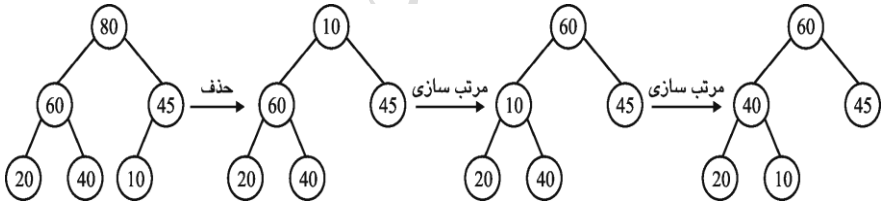
تابع درج یک عنصر به maxheap

```
insert (A , n , key){
  if (key<A[i] ) exit( );
  A[i]=key;
  while( (i >1) and ( A[i/2] <A[i] ) ) {
     exchange( A[i] ,  A[i/2])
     i = i/2;
    }
}
```

- پیچیدگی تابع درج برابر $O(\lg n)$ می باشد.
- عمل درج یا حذف در درخت Heap به گونه‌ای انجام می‌شود که درخت به صورت Heap باقی بمانـد. بنـابراین بعـد از حذف و درج نیاز به عملیات اضافی برای تنظیم درخت می‌باشد.

حذف از درخت Heap

در عمل حذف از Heap، همواره مقدار ریشه حذف شده و سمت راست‌ترین عنصر موجود در پایین‌ترین سطح، در ریشه قـرار می‌گیرد و درخت مجدداً تنظیم می‌شود. در شکل زیر یک بار عمل حذف انجام گرفته است:



- اگر همه گره های یک MaxHeap را حذف کرده و به همین ترتیب در یک BST خـالی درج کنـیم، BST اریـب بـه چپ خواهد شد، چون مقادیر MaxHeap از بزرگ به کوچک بیرون می آیند.
- اگر همه گره های یک MaxHeap را حذف کنیم، لیسـت خروجـی نزولـی خواهـد بـود و اگـر همـه گـره هـای یـک MinHeap را حذف کنیم، لیست خروجی صعودی خواهد بود. به این روش مرتب سازی، HeapSort می گویند.
- رابطه بازگشتی برای تعداد MinHeap های متقاوتی که می توان با $n = 2^k - 1$ عنصر مجزا ساخت، برابر است با:

$$T(n) = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)^2$$

مثال

با سه عدد متفاوت چند تا MinHeap می توان ساخت؟

حل: با ۳ عنصر می توان به ۲ صورت یک MinHeap ساخت، کافی است کوچکترین عنصر را در ریشه و دو عنصر دیگر را به ۲ صورت به عنوان فرزندان آن قرار داد. پس $T(3) = 2$.

■

مثال

با 15 عدد متفاوت چند تا MinHeap می توان ساخت؟

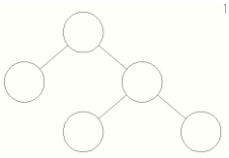
حل:

$$T(15) = \binom{14}{7} \times T(7) \times T(7) = \binom{14}{7} \times 80 \times 80$$

■

مثال

به چند طریق می توان اعداد 1 تا 5 را در گره های درخت زیر برچسب گذاری کرد تا عدد هر گره از اعداد فرزندان آن بزرگ تر باشد؟ (از هر 5 عدد باید استفاده شود و تکرار مجاز نیست.)



حل:

تعداد حالات را با $T(5)$ نشان می دهیم. می دانیم که عدد 5 باید ریشه باشد. از بین چهار عدد باقی مانده یعنی 4 , 3 , 2 , 1 به $\binom{4}{3}$ حالت می توان سه عنصر زیر درخت راست را انتخاب کرد:

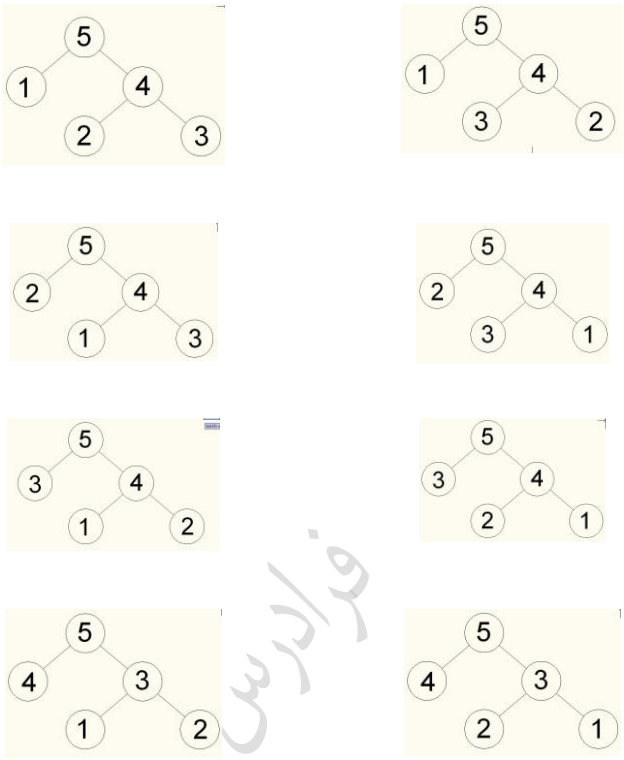
$$(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)$$

بدیهی است که برای هر انتخاب در زیر درخت راست، فقط یک عنصر برای زیر درخت چپ باقی می ماند. به طور نمونه اگر 3,2,1 را برای زیر درخت راست انتخاب کنیم، در زیر درخت چپ مقدار 4 باید انتخاب شود. از طرفی با توجه به شکل، هر سه عنصر را می توان به دو حالت در زیر درخت راست نوشت، عدد بزرگ در ریشه و دو عدد دیگر به عنوان فرزندان آن، که

جـای فرزنـدان را مـی تـوان عـوض کـرد. یعنـی $T(3) = 2$. پـس تعـداد کـل حـالات برابـر اسـت بـا :

$$T(5) = \binom{4}{3} \times T(3) \times 1 = 4 \times 2 \times 1 = 8$$

این 8 حالت در زیر نشان داده شده است:



درختی که مقدار کلید هر گره آن بزرگتـر یـا مسـاوی کلیـدهای فرزنـدانش باشـد را Maxtree و اگـر کوچکتر یا مساوی باشد را Mintree می‌گویند.

صف اولویت (Priority Queue)

یکی از رایج ترین کاربردهای heap ، استفاده از آن به عنوان یک صف اولویت کارآمد می باشد. همانند heap ، دو نـوع صـف اولویت وجود دارد: صف اولویت ماکزیمم و صف اولویت مینیمم.

یک صف اولویت، ساختمان داده ای برای نگهداری مجموعه S از عناصری است که هر یک دارای یک مقدار مربوطه بنام key است.

یک صف اولویت ماکزیمم (max-priority queue) اعمال زیر را پشتیبانی می کند:

MAXIMUM(S)	برگرداندن عنصر با بزرگترین کلید	O(1)
INSERT(S,x)	درج عنصر x	O(lgn)
EXTRACT-MAX(S)	حذف و برگرداندن عنصر با بزرگترین کلید	O(lgn)
INCREASE-KEY(S,x,k)	افزایش مقدار کلید عنصر x به مقدار جدید k	O(lgn)

یک صف اولویت مینیمم (min-priority queue) اعمال زیر را پشتیبانی می کند:

MINIMUM(S)	برگرداندن عنصر با کوچکترین کلید
INSERT(S,x)	درج عنصر x
EXTRACT-MIN(S)	حذف و برگرداندن عنصر با کوچکترین کلید
DECREASE-KEY(S,x,k)	کاهش مقدار کلید عنصر **x** به مقدار جدید k

یکی از کاربردهای صف اولویت ماکزیمم، دسته بندی کارها در یک کامپیوتر مشترک می باشد. وقتی کاری پایان یافت، کاری که اولویتی بالاتر از بقیه دارد، توسط EXTRACT-MAX انتخاب می شود. توسط INSERT نیز می توان کار جدیدی را اضافه کرد.

هر یک از اعمال، "درج یک عنصر، حذف کوچکترین عنصر، کاهش اولویت یک عنصر" را می توان به صورت کارا در یک صف اولویت انجام داد، اما یافتن یک عنصر در صف اولویت را نمی توان به صورت کارا انجام داد، چون یک عنصر خاص جای ثابتی ندارد و باید تمام عناصر جستجو شوند.

روشهای نمایش صف اولویت:

نحوه نمایش صف اولویت	درج	حذف
آرایه	O(1)	O(n)
لیست پیوندی	O(1)	O(n)
هرم (heap)	O(logn)	O(logn)

تذکر: در جدول بالا، اگر صف اولویت با آرایه یا لیست پیوندی مرتب شده پیاده سازی شده باشد، آنگاه درج در O(n) و حذف در O(1) انجام می شود.

درخت Deap

deap یک درخت دودویی کامل است که یا تهی است و یا دارای خواص زیر می باشد:

۱- در ریشه عنصری وجود ندارد.

۲- زیر درخت سمت چپ یک minheap است.

۳- زیر درخت سمت راست یک maxheap است.

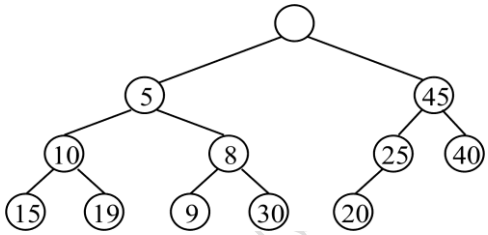
۴- کلید گره زیر درخت چپ کوچکتر یا مساوی کلید گره متناظر در زیر درخت راست می باشد.

اگر i گرهی در minheap باشد، آنگاه گره متناظر با آن در maxheap ، $j = i + 2^{\lfloor \log_2^i \rfloor - 1}$ است.

تذکر: اگر شرط و خاصیت(۴) تعریف deap، توسط تمام گره های برگ i در minheap برقرار باشد، سپس نتیجه می گیریم که این خاصیت برای کلیه گره های باقیمانده در minheap نیز برقرار است.

مثال

شکل زیر یک Deap یازده عنصری را نشان می دهد:



مثال

در یک Deap با دوازده گره، شماره گره متناظر با گره با 4 چه می باشد؟

حل: با قرار دادن عدد 4 به جای i در رابطه $j = i + 2^{\lfloor \log_2^i \rfloor - 1}$ ، مقدار j برابر 6 خواهد شد.

ارتفاع Deap برابر $o(\log n)$ می باشد.

حذف یا درج در Deap از مرتبه $o(\log n)$ می باشد.

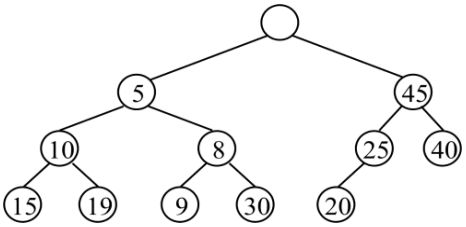
یک deap را می توان در یک آرایه ذخیره کرد. در خانه اول آرایه چیزی قرار نمی دهیم و تعداد عناصر آرایه برابر n-1 می باشد.

یک Deap یک heap با دو انتها است که در آن اعمال درج، حذف عنصر مینیمم و حذف عنصر ماکزیمم روی یک صف اولویت با دو انتها انجام می شود و دارای سرعت بیشتری از heap می باشد.

درج در یک Deap

در Deap زیر :

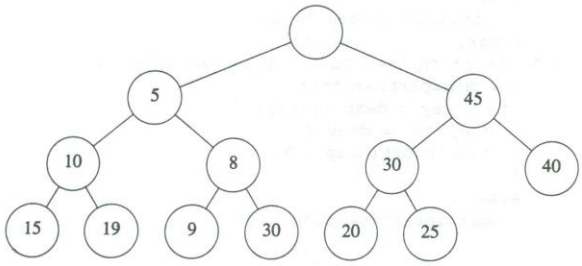
الف- عنصری با کلید 30 را در Deap زیر درج کنید.



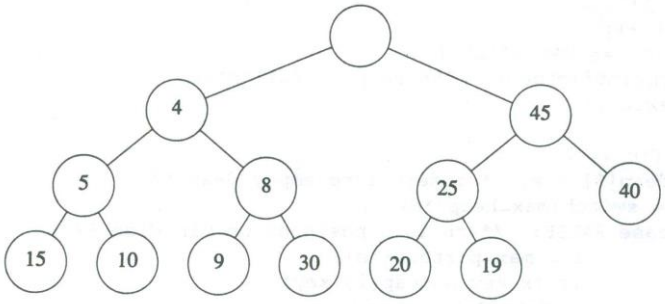
ب- عنصری با کلید 4 را در Deap زیر درج کنید.

حل:

الف- کلید 30 در راست 25 درج می شود و چون 30 از گره متناظرش یعنی 19 بزرگتر است، درج با همان روش درج در maxheap انجام می شود. یعنی 30 با 25 جابجا می شود.



ب- کلید 4 در راست 25 درج می شود. ولی چون 4 از گره متناظر آن یعنی 19 بزرگتر نیست، 4 و19 با هم تعویض می شوند. سپس 4 در درخت Minheap به بالا می رود و 10 و 5 را با پایین می کشاند.



درخت Treap

درخت Treap از ترکیب ویژگی های دو درخت BST و HEAP ساخته می شود. در این درخت هر گره x دارای کلید و اولویت می باشد. گره های treap طوری مرتب می شوند که کلیدها از ویژگی BST و اولویت ها از ویژگی MinHeap پیروی کنند.

در Treap ، کلید تکراری نداریم. در Treap ، اولویت تکراری نداریم.

در Treap :

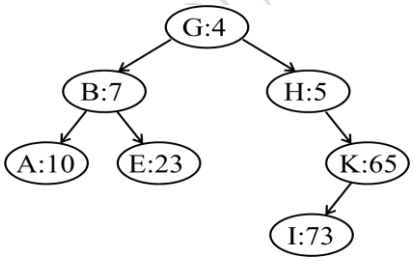
۱- اگر v فرزند چپ u باشد، آنگاه: $key[v] < key[u]$

۲- اگر v فرزند راست u باشد، آنگاه : $key[v] > key[u]$

۳- اگر u پدر v باشد، آنگاه: $priority[u] < priority[v]$

مثال

شکل زیر یک Treap را نشان می دهد که کلیدها حرفی و اولویت ها به صورت عددی می باشند:

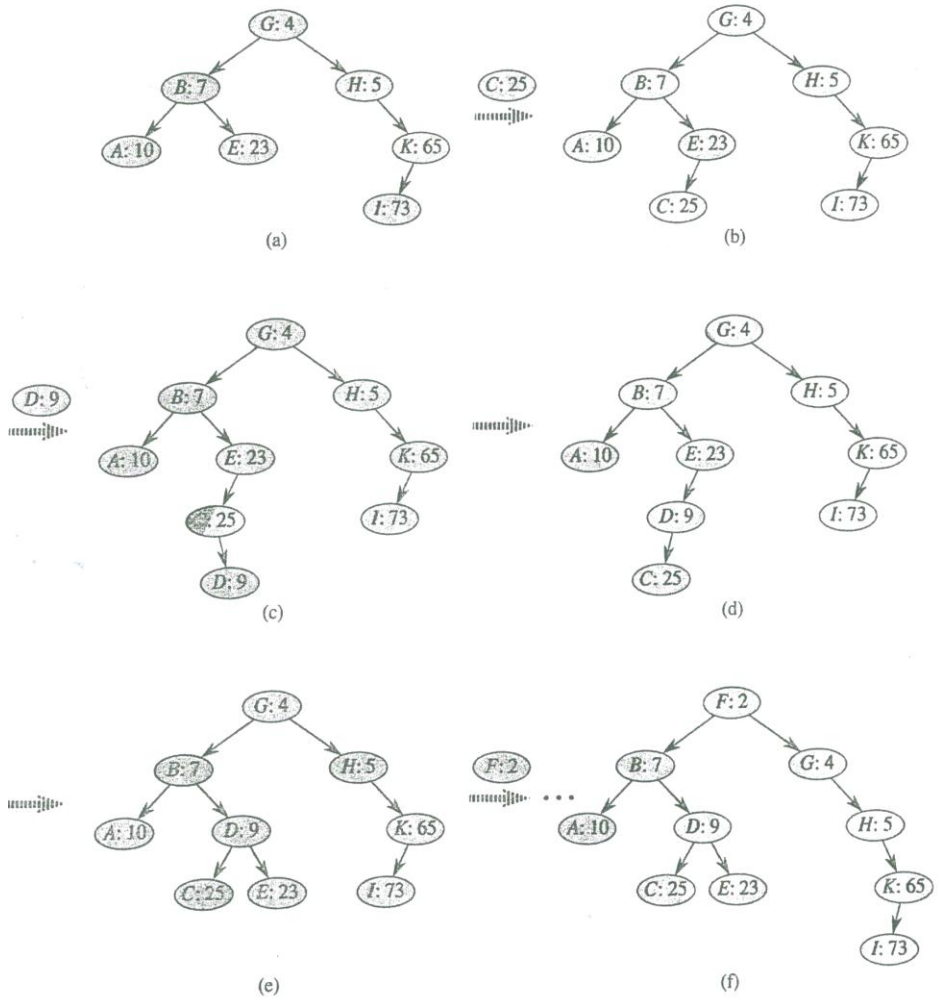


ارتفاع treap برابر $\theta(\log n)$ است و بنابراین زمان جستجوی یک مقدار در treap برابر $\theta(\log n)$ است.

اگر کلیدها و امتیاز عناصر متمایز باشند، فقط یک treap به صورت یکتا ساخته می شود.

مثال

شکل (a) یک treap را نشان می دهد. شکل (b) بعد از درج گره با کلید C و اولویت 25 است. شکل (c) تا (e) مراحل درج کلید D با اولویت 9 را مشخص می کند. شکل (f) بعد از درج یک گره با کلید F و اولویت 2 را نشان می دهد.



هیپ دو جمله ای

برای ادغام دو هیپ دودویی، با متصل کردن دو آرایه که هیپ دودویی را نگهداری می کنند و سپس اجرا کردن Min-Heapify در بدترین حالت، زمان $\theta(n)$ را صرف می کند. می توان با استفاده از هیپ دو جمله ای، عمل ادغام دو هیپ دو جمله ای با تعداد کل n عنصر را در زمان $O(\log n)$ انجام داد. هیپ های فیبوناچی زمان بهتری برای برخی از اعمال نسبت به هیپ دو جمله ای دارند.

هیپ دو جمله ای مجموعه ای از درخت های دو جمله ای است. درخت دو جمله ای ، یک درخت مرتب شده است که به طور بازگشتی تعریف می شود. ویژگی های درخت دو جمله ای B_k

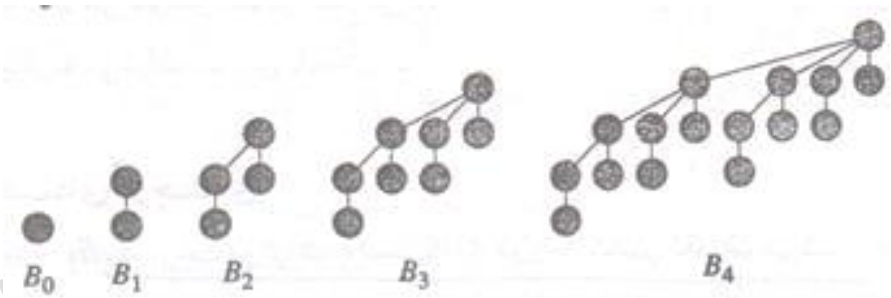
۱- دارای 2^k گره است.

۲- ارتفاع درخت برابر k است.

۳- در عمق i ، دقیقا $\binom{k}{i}$ گره وجود دارد. ($i = 0,1,...,k$)

۴- درجه ریشه k است که از درجه گره های دیگر بزرگتر است. بعلاوه اگر فرزندان ریشه از چپ به راست با $k-1, k-2, ..., 0$ شماره گذاری شوند، آنگاه i ریشه زیر درخت B_i است.

شکل زیر درخت های B_0 تا B_4 را نشان می دهد:



بیشترین درجه هر گره در درخت دو جمله ای با n گره برابر logn است.

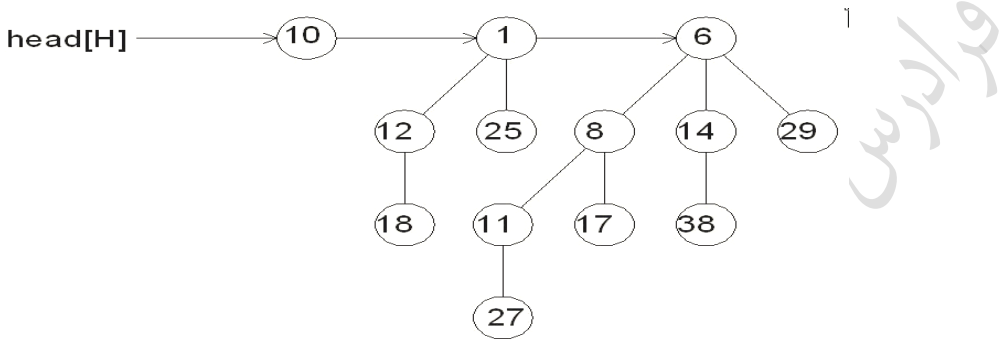
هیپ دو جمله ای H ، مجموعه ای از درخت های دو جمله ای است که ویژگی های زیر را دارا می باشد:

۱– هر درخت دوجمله ای در H ، از ویژگی minheap پیروی می کند. کلید یک گره، بزرگتر یا مساوی کلید پدرش است. می گوییم چنین درختی minheap مرتب شده است.

۲- برای عدد صحیح غیرمنفی k ، حداکثر یک درخت دو جمله ای در H که ریشه ای با درجه k دارد وجود دارد.

هیپ دو جمله ای با n گره شامل حداکثر $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ درخت دوجمله ای است.

شکل زیر یک هیپ دوجمله ای با 13 گره را نشان می دهد که شامل درخت های دو جمله ای B_0 ،B_2 و B_2 است که به ترتیب 1 ، 4 و 8 گره دارند. همچنین لیست ریشه که یک لیست پیوندی از ریشه ها به ترتیب افزایش درجه می باشد، نشان داده شده است.

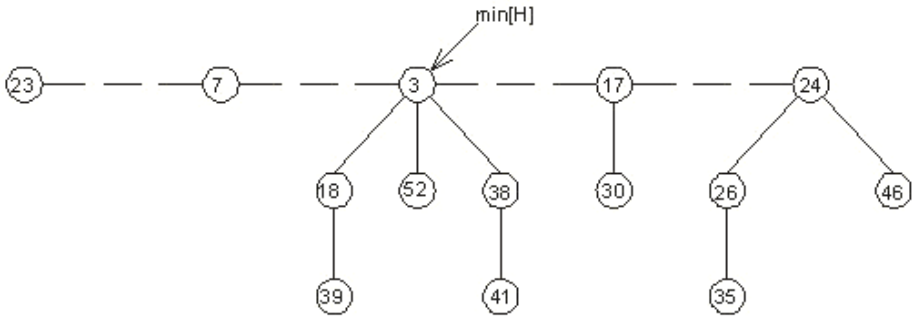


هیپ فیبوناچی

هیپ فیبوناچی مانند هیپ دو جمله ای یک مجموعه از درخت های minheap مرتب شده است، اما درخت ها لزوما درخت های دو جمله ای نیستند. به عبارتی هیپ فیبوناچی،مجموعه ای از درخت های دوجمله ای نامرتب است. یک درخت دوجمله ای نامرتب،شبیه یک درخت دوجمله ای است و به صورت بازگشتی تعریف می شود. ویژگی های این درخت مانند درخت دوجمله ای مرتب استاما با تفاوت زیر در ویژگی ۴ :

۴ – برای درخت دوجمله ای نامرتب U_k ، ریشه دارای درجه k است، که بزرگتر از درجه هر گره دیگر است. فرزندان ریشه، ریشه های زیر درخت های $U_0, U_1, ..., U_{k-1}$ هستند.

شکل زیر یک هیپ فیبوناچی شامل پنج درخت minheap مرتب شده با ۱۴ گره را نشان می دهد:



خط نقطه چین، لیست ریشه را مشخص می کند. گره مینیمم heap، گرهی است که شامل 3 کلید می باشد.

در لیست ریشه از لیست پیوندی دو طرفه چرخشی استفاده می شود، تا حذف یک گره و یا اتصال دو لیست در زمان $O(1)$ قابل انجام باشد.

در جدول زیر زمان اجرا در بدترین حالت برای هفت عمل بر روی سه پیاده سازی هیپ های قابل ادغام نشان داده شده است. برای هیپ فیبوناچی، زمان سرکشن شده نشان داده شده است،نه بدترین حالت.

	هیپ دودویی	هیپ دو جمله ای	هیپ فیبوناچی
ساختن هیپ جدید	$\theta(1)$	$\theta(1)$	$\theta(1)$
ادغام دو هیپ	$\theta(n)$	$O(\lg n)$	$\theta(1)$
درج یک گره به هیپ	$\theta(\lg n)$	$O(\lg n)$	$\theta(1)$
حذف گره از هیپ	$\theta(\lg n)$	$\theta(\lg n)$	$O(\lg n)$
حذف گره با کلید مینیمم	$\theta(\lg n)$	$\theta(\lg n)$	$O(\lg n)$
کاهش مقدار یک کلید	$\theta(\lg n)$	$\theta(\lg n)$	$\theta(1)$
پیدا کردن گره با کلید مینیمم	$\theta(1)$	$O(\lg n)$	$\theta(1)$

کنکور ارشد

(مهندسی کامپیوتر- دولتی ۸۵)

۱- آرایه T که در آن تعدادی از خانه ها هنوز مقداردهی نشده اند را در نظر می گیریم. با قرار دادن مقادیر کدام یک از موارد زیر، این آرایه به یک هیپ تبدیل خواهد شد؟

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	75		30		17	28	20	7		

۱) T[2]=30 ; T[4]=9 ; T[9]=10 ; T[10]=6

۲) T[2]=15 ; T[4]=15 ; T[9]=17 ; T[10]=10

۳) T[2]=39 ; T[4]=30 ; T[9]=32 ; T[10]=16

۴) T[2]=21 ; T[4]=14 ; T[9]=0 ; T[10]=16

پاسخ: جواب گزینه ۴ است.

در یک MaxHeap، کلید هر گره از فرزندانش بزرگتر یا مساوی است. به عبارتی باید T[i] از T[2i] و T[2i+1] بیشتر یا مساوی باشد. بنابراین گزینه ۱و۲و۳ نادرست است، چون T[4] باید از T[9] بزرگتر یا مساوی باشد.

البته می توان درخت هر گزینه را رسم کرد. فقط درخت گزینه ۴ ، Maxheap است:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	75	21	30	14	17	28	20	7	0	16

(مهندسی IT – دولتی ۸۶)

۲- سومین کوچکترین کلید در یک MinHeap با کلیدهای متمایز در درایه‌هایی با چه اندیس‌هایی می‌تواند باشد؟

۱) 1,2,3 ۲) 2,3,4,5,6,7 ۳) 4,5,6,7 ۴) 1,2,3,4,5,6,7

پاسخ: جواب گزینه ۲ است.

با توجه به اینکه m امین کوچک ترین عنصر در MinHeap ، می تواند در یکی از خانه های A[2] تا $A[2^m - 1]$ قرار بگیرد، سومین کوچکترین عنصر می تواند از اندیس 2 تا اندیس7 قرار بگیرد.

(مهندسی کامپیوتر- دولتی ۸۰)

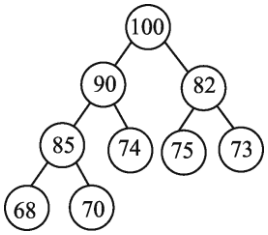
۳- آرایه زیر یک Heap است. برای درج عدد 95 در آرایه به گونه ای که آرایه نهایی نیز وضعیت Heap داشته باشد، چند عمل exchange (تعویض دو کمیت) لازم است؟

100	90	82	85	74	75	73	68	70

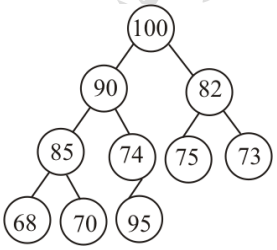
۱) 2 ۲) 4 ۳) 6 ۴) 8

پاسخ: جواب گزینه ۱ است.

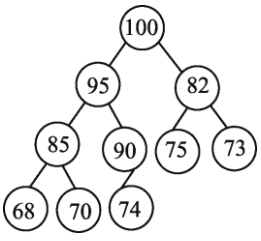
با توجه به آرایه داده شده، درخت MaxHeap به صورت زیر خواهد بود.



عدد 95 در آخرین سطح درج می‌شود و در صورت نیاز درخت تنظیم می‌شود:



بعد از درج ، محل 95 با 74 تعویض می‌شود و سپس 95 با 90 تعویض می شود و درخت زیر حاصل می‌شود:



(مهندسی IT- دولتی ۹۰)

۴- یک MaxHeap با n عنصر را که در آرایه A[1..n] قرار دارد، در نظر بگیرید. مرتبه زمانی الگوریتم حذف عنصر i ام $(1 \le i \le n)$ از این Max Heap به گونه ای که ساختار Max Heap را حفظ کند، چیست؟

۱) 1 ۲) n logn ۳) logn ۴) n

حل : جواب گزینه ۳ است. مرتبه زمانی الگوریتم حذف یک عنصر از درخت Heap به ارتفاع درخت که برابر logn است، بستگی دارد و برابر $o(\log n)$ می باشد.

■

(علوم کامپیوتر- دولتی ۸۹)

۵- یک درخت MaxHeap تحت کدام یک از عملیات زیر همچنان MaxHeap می ماند. فرض کنید که عمل خواسته شده روی یک یا چند گره دلخواه درخت اعمال شود؟

۱) left Rotate (چرخش به چپ)

۲) Mirror (تعویض بچه های چپ و راست گره)

۳) Right rotate (چرخش به راست)

۴) Exchange (تعویض مقدار موجود در گره با بزرگترین فرزند)

پاسخ: گزینه ۲ جواب است.

بچه های چپ و راست یک MaxHeap هیچ ارتباطی با هم ندارند و اگر آنها را تعویض کنیم، درخت باز هم MaxHeap می ماند. (در MaxHeap هر گره از فرزندانش بزرگتر یا مساوی است و بین فرزندان یک گره، ارتباطی وجود ندارد.)

■

(مهندسی IT – دولتی ۹۰)

۶- چند Min Heap با هفت عنصر که حاوی کلیدهای متمایز یک تا هفت (با هر ترتیب دلخواه) است، می توان ساخت؟

۱) 20 ۲) 80 ۳) 60 ۴) 40

حل: جواب گزینه ۲ است.

کوچکترین عنصر را در ریشه قرار می دهیم. از بین ۶ عنصر باقی مانده، ۳ عنصر را به $\binom{6}{3}$ حالت انتخاب می کنیم و با آن ها به ۲ صورت، زیر درخت سمت چپ و با یقیه نیز به ۲ دو صورت، زیر درخت سمت راست می سازیم. پس تعداد کل حالت ها برابر است با:

$$T(7) = \binom{6}{3} \times T(3) \times T(3) = 20 \times 2 \times 2 = 80$$

فصل ۹

گراف

گراف

گراف G، شامل دو مجموعه V و E است. V مجموعه محدود و غیرتهی از رئوس و E مجموعه‌ای از زوج رئوس (که یال نامیده می شود) است. گراف با عبارت G = (V,E) مشخص می شود.

گراف را می توان به دو نوع تقسیم کرد:

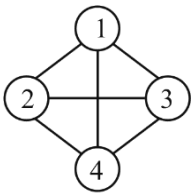
۱- گراف جهت‌دار

گرافی که در آن ترتیب گره‌ها در زوج مرتب اهمیت داشته باشد، یعنی زوجهای <v1,v2> و<v2,v1> دو یال متفاوت را نمایش دهند.

۲- گراف غیر جهت‌دار : گرافی که در آن جای دو رأس در مجموعه یالها اهمیت نداشته باشد.

مثال

برای گراف بدون جهت G1 ، مجموعه V و E را مشخص نمایید.



(G1)

پاسخ:

V (G1) = {1,2,3,4}
E (G1) = { (1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4) }

مثال

برای گراف جهت دار G2 ، مجموعه V و E را مشخص نمایید.

(G2)

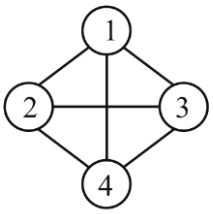
پاسخ:

V (G2) = {1,2,3} , E (G2) = { <1,2>,<2,1>, <2,3> }

- درجه یک گره، تعداد یالهای گذرنده از آن می باشد.
- تعداد یالها در هر گرافی برابر $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i$ می باشد. (d_i: درجه رأسi) (n: تعداد رئوس)
- تعداد گره ها با درجه فرد در یک گراف بدون جهت، همواره عددی زوج می باشد.
- در یک گراف جهت دار، گره با درجه خروجی مثبت و درجه ورودی صفر را گره منبع و گره با درجه ورودی مثبت و درجه خروجی صفر را گره چاه می نامند.
- مسیری که همه رئوس آن مجزا باشند، بجز (احتمالا) اولی و آخری را مسیر ساده می گویند.
- یک مسیر ساده که اولین و آخرین راس آن یکسان باشد را حلقه می گویند.

مثال

چند نمونه از مسیر ساده و حلقه در گراف زیر را مشخص کنید.



(G1)

پاسخ: مسیر $3 \to 4 \to 2 \to 1$، یک مسیر ساده با طول 3 در G1 می باشد. مسیر $1 \to 2 \to 3 \to 1$ یک حلقه به طول 3 در G1 است. ■

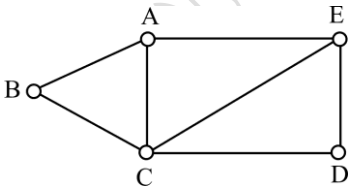
مثال

با توجه به گراف زیر موارد زیر مشخص نمایید:

۱- از B به E چند مسیر ساده به طول دو وجود دارد؟

۲- از B به D چند مسیرساده به طول دو وجود دارد؟

۳- گراف زیر دارای چند حلقه به طول چهار می باشد؟



پاسخ:

از B به E مسیرهای ساده BAE , BCE به طول 2 وجود دارد. از B به D یک مسیرساده BCD به طول 2 وجود دارد و تعداد دو حلقه AEDCA و AECBA به طول 4 وجود دارد.

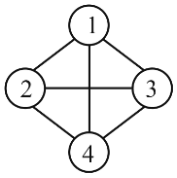
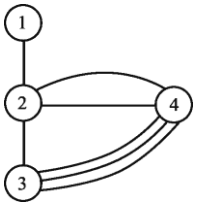
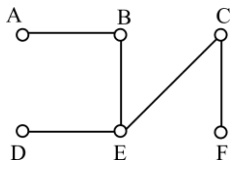
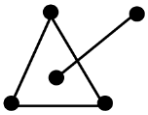
■

انواع گراف

انواع گراف در جدول زیر آورده شده است:

گراف ساده	گرافی که طوقه و یال موازی نداشته باشد.
گراف چند گانه (Multi Graph)	گرافی که در آن یالهای چندگانه (Multi Edge) مجاز باشد.
گراف کامل	گراف بدون جهتی که همه یالهای آن رسم شده باشد.
گراف وزن دار(شبکه)	گرافی که به هر یال آن یک مقدار عددی نسبت داده شده باشد.
گراف درختی	گرافی که حلقه نداشته باشد.
گراف همبند (متصل)	گرافی که یک مسیر بین هر دو گره آن وجود داشته باشد.
گراف همبند قوی	گراف جهت‌داری که برای هر زوج گره v,u هم یک مسیر از u به v و هم یک مسیر از v به u وجود داشته باشد.

چند نمونه :

گراف کامل		**گراف چند گانه**	
گراف درختی		**گراف ناهمبند**	

یالهای متمایز که نقاط پایانی یکسانی را به هم وصل می کنند، را یالهای چند گانه می گویند.

در گراف کامل، درجه هر یک از گره ها برابر n-1 و تعداد یالهای آن برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد.

گراف مکمل یک گراف، هیچ یال مشترکی با گراف ندارد و مجموع دو گراف، یک گراف کامل خواهد بود. گرافهای زیر مکمل یکدیگرند :

نمایش گراف

یک گراف را می توان به روشهای زیر نمایش داد:

۱- ماتریس مجاورتی

۲- لیستهای مجاورتی

۳- لیستهای مجاورتی معکوس

۴- لیستهای مجاورتی چند گانه

تذکر: به جای اصطلاح مجاورتی از همجواری یا همسایگی نیز استفاده می شود.

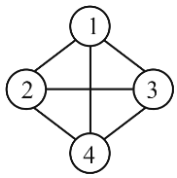
ماتریس مجاورتی

ماتریس مجاورتی گراف G=(V,E) با n راس، آرایه‌ای n×n به نام A می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} A[i,j]=1 & (Vi,Vj)\in E(G) \\ A[i,j]=0 & (Vi,Vj)\notin E(G) \end{cases}$$

مثال

ماتریس مجاورتی گراف زیر را بدست آورید.



پاسخ: درایه های سطر اول به غیر از اولین درایه، همه برابر یک می باشند، چون گره ۱ با بقیه گره ها مجاور است و فقط با خودش مجاور نمی باشد. چنین تحلیلی نیز برای سطری های دیگر می توان انجام داد.

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

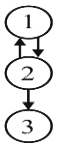
درجه هر رأس مانند i در گراف بدون جهت، مجموع تعداد یکهای موجود در سطر i ماتریس است

- تعداد یکهای ماتریس مجاورتی گراف بدون جهت، همواره دو برابر تعداد یال ها می باشد.

- ماتریس هم جواری گراف بدون جهت، متقارن است ولی برای گراف جهت‌دار، لزوماً متقارن نمی باشد.
- تمامی درایه های ماتریس همجواری گراف کامل به غیر از قطر اصلی برابر یک می باشند.

مثال

ماتریس مجاورتی گراف جهت دار زیر را بدست آورید.



پاسخ:

	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	1
3	0	0	0

- تعداد یک های ماتریس مجاورتی گـراف جهت دار، همواره برابر تعداد یال ها می باشد.
- در یک گراف جهت‌دار، درجه خروجی هر رأس، مجموع عناصر سـطری آن و درجـه ورودی هـر رأس، مجمـوع عناصـر ستونی آن رأس می‌باشد.
- اگر در ماتریس همجواری، درایه واقع در سطر و ستون یک گره برابر یک باشد، یک طوقـه در آن گـره وجود دارد.(طوقه یعنی حلقه به طول یک)
- در یک گراف جهت دار، اگر ماتریس هم جواری مثلثی باشد، گراف بدون دور است.
- اگر گرافی Acyclic (فاقد دور و حلقه) باشد، آنگاه ماتریس همجواری آن مثلثی می باشد.

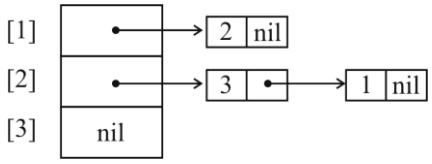
لیستهای مجاورتی (Adjacency List)

در این روش نمایش برای هر گره در گراف یک لیست وجود دارد و اشاره‌گر شروع این لیستها در یک آرایه قرار دارند. لیسـت سطر i حاوی رئوسی است که از گره i به آنها مسیری به طول یک وجود دارد.

مثال

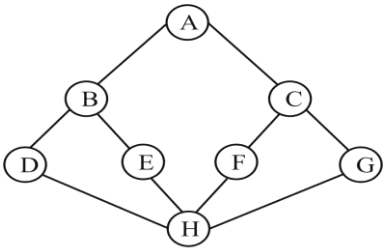
لیست مجاورتی گراف داده شده را رسم نمایید.

پاسخ:



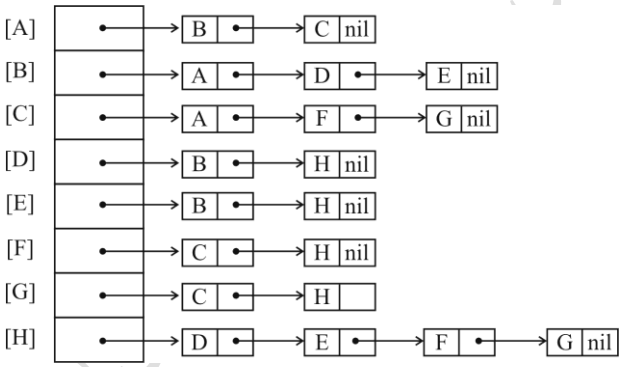
مثال

لیست مجاورتی گراف داده شده را رسم نمایید.



G

پاسخ:



درجه هر راس در یک گراف غیر جهت‌دار را می‌توان با شمارش تعداد گره‌های متناظر آن در لیست مجاورتی تعیین کرد.

اگر تعداد یالها در یک گراف زیاد باشد، از روش ماتریس مجاورتی و اگر تعداد یالها کم باشد از روش لیست مجاورتی جهت نمایش گراف استفاده می شود. بنابراین برای نمایش گراف های پراکنده از لیست همجواری استفاده می شود.

برای نمایش گراف G=(V,E) به روش لیست همجواری، فضای مصرفی برابر با O(|E|+|V|) می باشد.

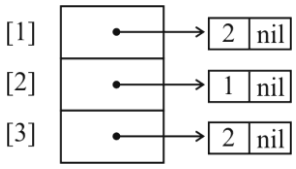
لیستهای مجاورتی معکوس

لیست مجاورتی معکوس مشابه لیست مجاورتی است، با این تفاوت که در لیست سطر i، رئوسی قرار می‌گیرند که از آنها به گره i ، مسیری به طول یک وجود دارد. توسط لیست مجاورتی معکوس می توان به سادگی درجه ورودی یک راس را مشخص کرد.

مثال ۱۰-۱۰

لیست مجاورتی معکوس گراف زیر را رسم نمایید.

پاسخ:



در گراف بدون جهت، لیست مجاورتی و لیست مجاورتی معکوس یکسان می‌باشند.

معکوس یک گراف

برای بدست آوردن معکوس گراف جهت دار G که آن را با $\tilde{G}$ نمایش می دهند، کافی است که جهت یالها را در G معکوس می کنیم.

اگر A ماتریس همسایگی گراف جهت دار G باشد، آنگاه ترانهاده A یعنی A^T، ماتریس همسایگی گراف $\tilde{G}$ می باشد.

پیمایش گراف

پیمایش یک گراف به منظور ملاقات کلیه گره‌های آن انجام می‌گیرد و به دو طریق ممکن می باشد:

۱- عمقی (پیمایش اول ـ عمق) (DFS : Depth First Search)

۲- سطحی(پیمایش اول- عرض) (BFS : Breadth First Search)

در پیمایش DFS از پشته و در پیمایش BFS از صف استفاده می‌شود.

پیمایش سطحی (BFS)

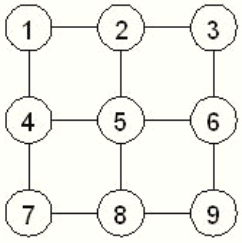
پیمایش سطحی منحصر به فرد نیست. در یک روش با شروع از یک گره، ابتدا گره را وارد صف کرده و سپس کلیه گره‌های مجاور با آن (فرزندان گره از چپ به راست) را در صف درج می کنیم. حال عنصر بعدی از صف را حذف کرده و گره های مجاور آن را درج می کنیم و این عمل را ادامه داده تا همه گره ها پیمایش شوند.

پیمایش عمقی (DFS)

پیمایش عمقی منحصر به فرد نیست. در یک روش با شروع از یک گره، آن را ملاقات کرده و سپس کلیه گره‌های سمت چپ را تا آخرین عمق پیمایش می کنیم. اگر در پایین رفتنهای متوالی، گره‌ای ملاقات شود که هیچ گره همجواری نداشته باشد یا تمام گره‌های همجوار آن ملاقات شده باشد، برگشت به یک سطح بالا انجام می‌گیرند و روند فوق تکرار می‌شود. این الگوریتم از پشته استفاده می کند.

مثال ۱۰-۱۱

سه پیمایش DFS برای گراف زیر مشخص کنید.



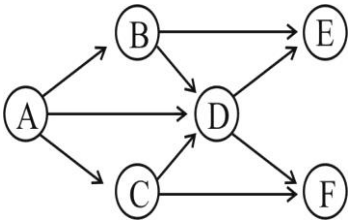
پاسخ:

1 , 4 , 7 , 8 , 9 , 6 , 5 , 2 , 3
1 , 2 , 3 , 6 , 9 , 8 , 7 , 4 , 5

1 , 2 , 3 , 6 , 5 , 4 , 7 , 8 , 9

مثال ۱۰-۱۲

چند پیمایش BFS و DFS برای گراف زیر مشخص کنید.



پاسخ:

چند پیمایش BFS به صورت زیر است:

ABCDEF , ADBCEF , ADBCFE

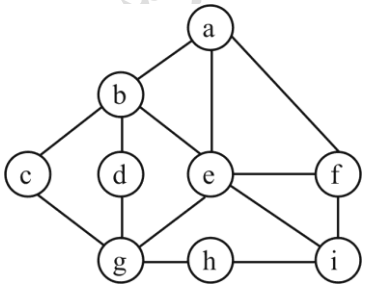
و چند پیمایش DFS :

ABEDFC , ABDFEC , ADEFBC

■

مثال ۱۰-۱۳

یکی از پیمایش های BFS و DFS گراف زیر را مشخص کنید.



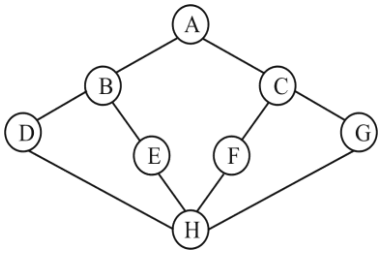
پاسخ:

BFS : a b e f c d g i h
DFS : a b c g d e f i h

■

مثال ۱۰-۱۴

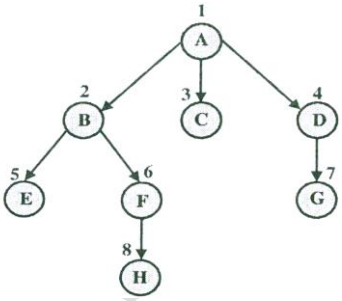
یکی از پیمایش های BFS گراف زیر را مشخص کنید.



پاسخ: ABCDEFGH

مثال ۱۰-۱۵

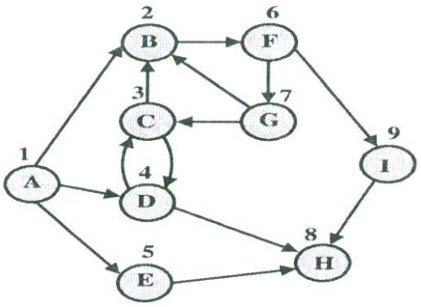
پیمایش DFS گراف زیر را به دست آورید؟



پاسخ: ABEFHCDG

مثال ۱۰-۱۶

پیمایش DFS و BFS گراف زیر را به دست آورید؟



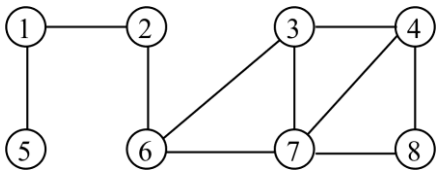
پاسخ:

BFS : ABDEFCHGI

DFS : ABFIHGCDE

مثال ۱۰-۱۷

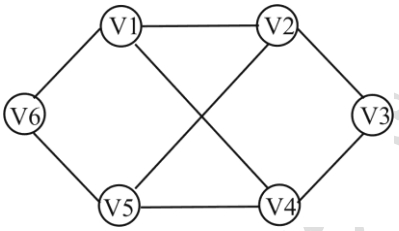
یکی از پیمایش های BFS گراف زیر با شروع از گره شماره ۲ را مشخص کنید.



حل : 2 , 6 , 1 , 3 , 7 , 5 , 4 , 8

مثال ۱۰-۱۸

یکی از پیمایش های BFS گراف زیر را به کمک صف مشخص کنید.



پاسخ:

پیمایش BFS از صف استفاده کرده و در صف درج به انتها و حذف از ابتدا انجام می گیرد.

۱- درج V1 در ابتدای صف

۲- حذف و چاپ V1

۳- درج فرزندان V1 یعنی V6,V4,V2

۴- حذف و چاپ اولین فرزند V1 که درج کرده ایم (یعنی V6)

۵- درج فرزند V6 (یعنی V5)

۶- حذف و چاپ گره ابتدای صف(یعنی V4)

۷- درج فرزندV4 (یعنی V3)

۸- حذف و چاپ گره ابتدای صف(یعنی V2)

۹- حذف و چاپ گره ابتدای صف(یعنی V5)

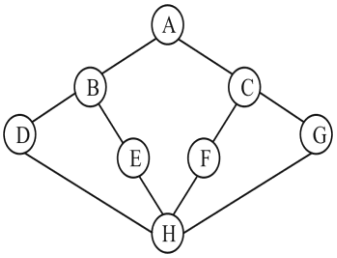
۱۰- حذف و چاپ گره ابتدای صف(یعنی V3)

بنابراین حاصل پیمایش BFS گراف برابر است با:

V1 , V6 , V4 , V2 , V5 , V3

مثال ۱۰-۱۹

یکی از پیمایش های DFS گراف زیر را به کمک پشته مشخص کنید.



پاسخ:

حاصل پیمایش عمقی گراف داده شده برابر است با: ABDHEFCG

الگوریتمهای BFS, DFS، اگر در مورد یک گراف همبند بکار برده شدند، از (n–1) ضلع گراف که درز هم ندارند، استفاده می کنند. (n : تعداد گره ها)

در الگوریتم های BFS, DFS، یالهای (اضلاع) مورد استفاده، یک درخت را می سازند.

هزینه زمانی هر یک از پیمایش های BFS و DFS، گراف G=(V,E) که به صورت ماتریس مجاورت بیان شده است، برابر $|V|^2$ است و اگر به صورت لیست مجاورت بیان شده است، برابر $|E|$ است.

تعداد یالهای گراف کامل برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ و تعداد یالهای انتخاب شده در پیمایش DFS برابر (n-1) می باشد. بنابراین تعداد یالهای ملاقات نشده در پیمایش DFS برابر است با :

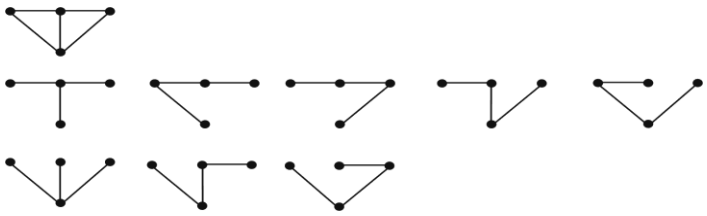
$$\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

درخت پوشا (Spanning Tree)

درختی شامل تمامی رئوس گراف و تعدادی از لبه‌های گراف را درخت پوشای گراف می نامند. درخت پوشای یک گراف با n گره، دارای حداقل n-1 یال است.

مثال ۱۰-۲۰

برای گراف زیر ۸ درخت پوشا رسم شده است:

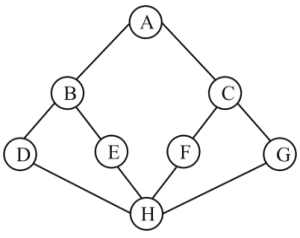


هر درخت فراگیر را می‌توان با حذف ۲ یال از ۵ یال گراف داده شده به دست آورد. این کار با ۱۰ روش انجام می‌شود اما ۲ تا از آنها منتهی به گراف ناهمبند می شوند.

یک گراف کامل با n راس، حداقل دارای $2^{(n-1)} - 1$ درخت پوشا می باشد.

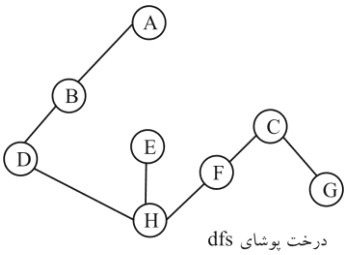
مثال ۱۰-۲۱

درخت پوشای حاصل از جستجوی عمقی گراف G را بدست آورید؟



G

پاسخ: پیمایش DFS برابر ABDHEFCG می باشد، بنابراین درخت پوشای عمقی به صورت زیر است:



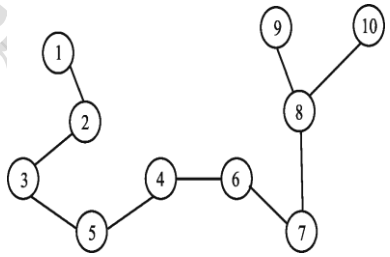
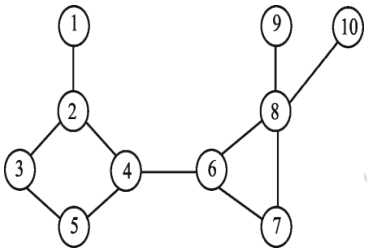
درخت پوشای dfs

درخت پوشای حاصل از پیمایش عمقی گراف را درخت پوشای عمقی و درخت پوشای حاصل از پیمایش سطحی گراف را درخت پوشای سطحی، می نامند.

اگر G یک گراف متصل و T یکی از درختهای پوشای عمقی آن باشد، آنگاه G هیچ لبه متقاطع با T ندارد.

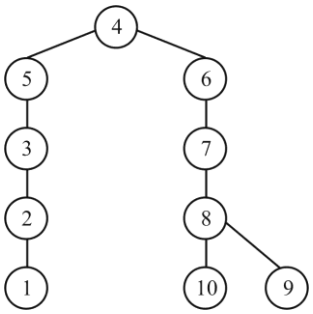
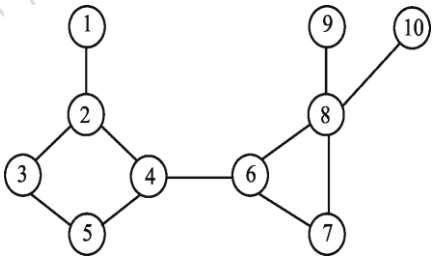
مثال ۱۰-۲۲

رسم درخت پوشای عمقی گراف با شروع از گره 1 :

درخت پوشای عمقی با شروع از گره 1	گراف
	

مثال ۱۰-۲۳

درخت پوشای عمقی گراف با شروع از گره 4 :

درخت پوشای عمقی با شروع از گره 4	گراف
	

درخت پوشای حداقل (MST)

درخت پوشایی که در بین تمام درختهای پوشا ،دارای حداقل وزن باشد را MST می نامند. برای به دست آوردن MST می توان از الگوریتمهای زیر استفاده کرد: ۱- کراسکال(راشال) ۲- پریم ۳- سولین

در این روشها باید دقیقا از n-1 یال استفاده شود و نباید از یال هایی که حلقه تولید می کنند، استفاده کرد.

الگوریتم کراسکال

مراحل اجرای این الگوریتم به صورت زیر می باشد:

۱- مرتب کردن صعودی تمام یالها.

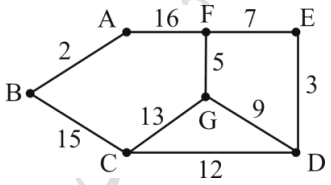
۲- مقدار دهی اولیه T ، به طوری که یک گراف متشکل از همان گره‌های G و بدون یال باشد.

۳- تکرار عملیات زیر به تعداد n-1 مرتبه:

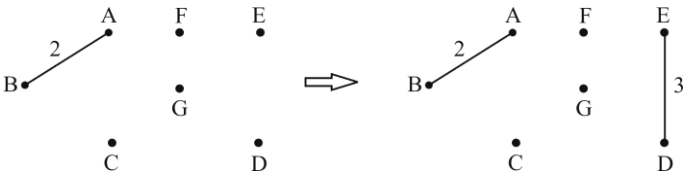
" به T یک یال از G با حداقل وزن اضافه کن به طوری که در T تشکیل حلقه ندهد."

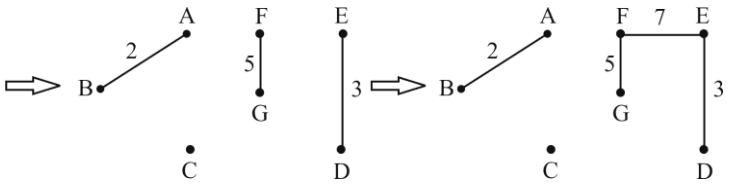
مثال ۱۰-۲۴

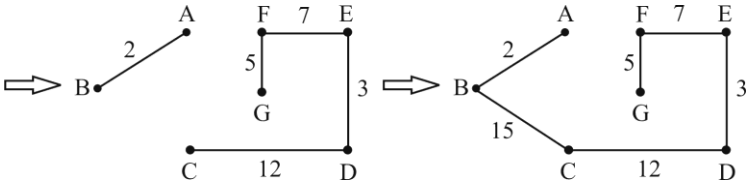
به کمک الگوریتم کراسکال، درخت پوشای حداقل گراف زیر را بدست آورید.



پاسخ:

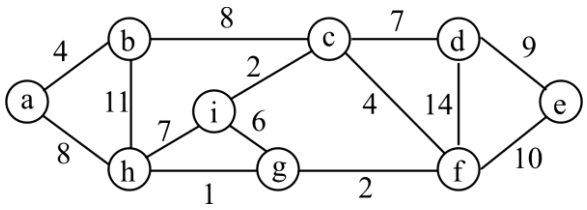






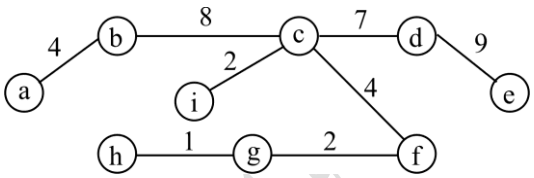
مثال ۱۰-۲۵

وزن درخت پوشای مینیمم گراف در صورت استفاده از الگوریتم کراسکال چه می باشد؟



حل:

ترتیب اضافه شدن یالها در روش کراسکال برابر است با: 1,2,2,4,4,7,8,9 ، بنابراین وزن یال ها در درخت پوشای مینیمم برابر 37 می باشد.



درخت پوشای بدست آمده، منحصر به فرد نیست، چون می توان به جای یال (b,c) از یال (a,h) استفاده کرد.

در گرافی که یالهایی با وزن مساوی دارد، احتمال دارد بتوان بیش از یک درخت پوشای حداقل رسم کرد، اما وزن همه آنها برابر است.

الگوریتم پریم

الگوریتم پریم نیز مشابه کراسکال، درخت پوشا با کمترین هزینه را لبه به لبه می سازد با این تفاوت که یالی که در روش کراسکال اضافه می شود، می تواند به یالهایی که قبلا اضافه شده متصل نباشد، اما در پریم باید متصل باشد.در روش پریم از یک گره شروع کرده و گره ای را به آن وصل می کنیم که نزدیکتر است. حال گره ای را که به یکی از این دو گره نزدیکتر است را وصل می کنیم.

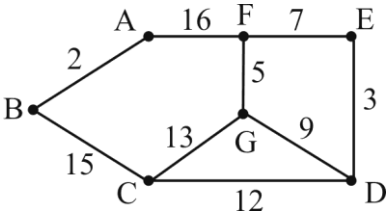
مرتبه اجرایی پریم برابر $o(n^2)$و مرتبه اجرایی کراسکال برابر $o(e\times \log e)$ می باشد.

وزن درخت پوشای حداقل حاصل از هر یک الگوریتم های پریم یا کراسکال با هم برابر می باشد.

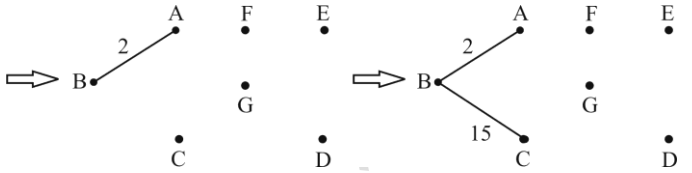
در هر یک از مراحل اجرای الگوریتم پریم، مجموعه لبه های انتخابی یک درخت را می سازند در حالی که در کراسکال در هر لحظه، یک جنگل را می سازد.

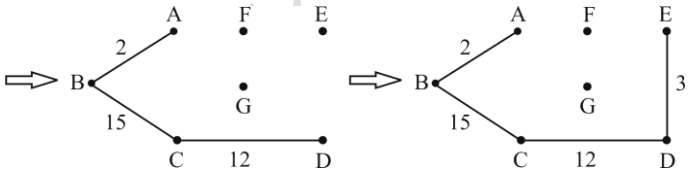
مثال ۱۰-۲۶

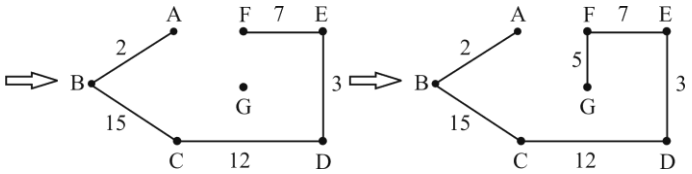
به کمک الگوریتم پریم، درخت پوشای حداقل گراف زیر را بدست آورید.(با شروع از گره a)



پاسخ:

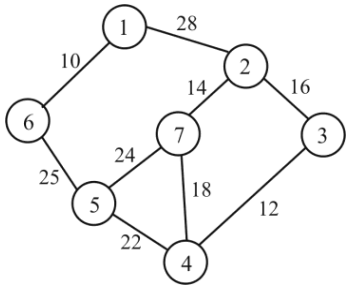






مثال ۱۰-۲۷

ترتیب اضافه شدن یالها را در صورت استفاده از الگوریتم پریم و کراسکال مشخص نمایید.



حل:

ترتیب اضافه شدن یالها در روش کراسکال برابر است با: 10,12,14,16,22,25

و در روش پریم برابر است با : 10,25,22,12,16,14

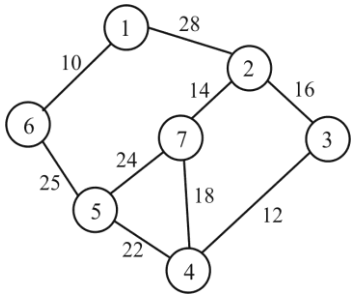
برای یافتن درخت پوشای حداقل یک گراف خلوت از الگوریتم کراسکال استفاده می شود. چون این الگـوریتم بـر پایـه یالها کار می‌کند.(گراف خلوت، گرافی است که تعداد یالهای آن کم باشد.)

الگوریتم سولین

در این الگوریتم در هر مرحله چندین لبه انتخاب می شود. در شروع هر مرحله، لبه های انتخابی، به همراه همه n گراف برداری، یک جنگل پوشا را تشکیل می دهند. در طی هر مرحله، یک لبه برای هر درخت در این جنگل انتخاب می شود و این لبه، لبه ای با کمترین هزینه است که دقیقا یک بردار در درخت دارد.

مثال ۱۰-۳۰

درخت پوشای حداقل گراف زیر را با استفاده از الگوریتم سولین بدست آورید.



پاسخ:

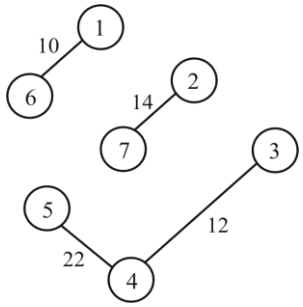
هر درخت در این جنگل پوشا، یک بردار منفرد است. لبه های انتخابی با رئوس 1 تا 7 ، به ترتیب برابر است با:

(1,6) , (2,7) , (3,4) , (4,3) , (5,4) , (6,1) , (7,2)

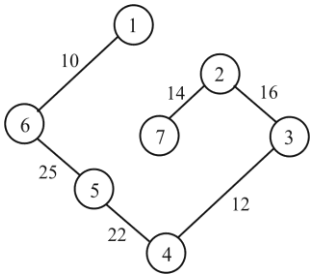
که لبه های مجزای این انتساب برابر است با:

(1,6) , (2,7) , (3,4) , (5,4)

با افزودن اینها به مجموعه لبه های انتخابی، شکل زیر حاصل می شود:



در مرحله بعدی، درخت با مجموعه رئوس {1,6} ، لبه (6,5) را انتخاب می کند و دو درخت باقیمانده، لبه (2,3) را انتخاب می کند و درخت پوشای نهایی حاصل می شود:



فرض کنیم گراف G=(V,E) یک گراف بی‌جهت و M یک درخت فراگیر مینیمم برای G باشد، مسیر M بین هر جفت رأس V_1 و V_2 لزوما کوتاه‌ترین مسیر نمی‌باشد.

کنکور ارشد

(علوم کامپیوتر- دولتی ۸۹)

۱- در نمایش یالی (Adjacency Multilist) یک گراف G=(V,E) با $|E|=m,|V|=n$ ، چند Linked list و چه تعداد node وجود دارد (بدون در نظر گرفتن head node)؟ (گزینه ها از چپ به راست)

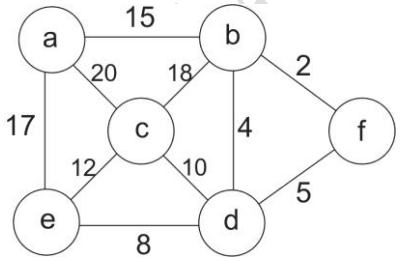
۱) $|V|+|E|,|V|$ ۲) $|V|,|E|$ ۳) $|E|,|E|$ ۴) $|V|,|V|+|E|$

حل: جواب گزینه ۲ است.

در نمایش یالی گراف G=(V,E) ، به تعداد گره ها یعنی $|V|$، لیست پیوندی و به تعداد دو برابر یالها که از مرتبه $|E|$ می باشد، node وجود دارد.

(مهندسی IT – دولتی ۸۵)

۲- ترتیب انتخاب یال ها در الگوریتم Prim روی گراف زیر با شروع از راس a کدام مورد است؟



۱) (b,f),(b,d),(e,d),(c,d),(a,b)
۲) (a,b),(b,f),(f,d),(d,e),(e,c)
۳) (a,b),(b,f),(b,d),(d,e),(d,c)
۴) هیچکدام

حل: جواب گزینه ۳ است.

با شروع از گره a، در مرحله اول یال (a,b) با وزن 15 انتخاب می شود. در مرحله دوم یال (b,f) با وزن 2، در مرحله سوم یال (b,d) با وزن 4، در مرحله چهارم یال (e,d) با وزن 8 و در مرحله پنجم یال (d,c) با وزن 10 انتخاب خواهد شد.

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۶)

۳- یک گراف بسیار متصل شامل n گره مفروض است. می خواهیم با استفاده از الگوریتم kruskal کوچکترین درخت پوشای این گراف را بدست آوریم. در این صورت پیچیدگی زمانی این الگوریتم برابر است با:

۱) $o(n^2 \log n)$ ۲) $o(n \log n)$ ۳) $o(n^2)$ ۴) $o(\frac{n^2}{2})$

حل: گزینه ۱ جواب است.

مرتبه اجرایی الگوریتم کراسکال برابر $\theta(e \log e)$ می باشد که در یک گراف کامل که تعداد یالها برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ (از مرتبه n^2) می باشد، خواهیم داشت:

$$\theta(e \log e) = \theta(n^2 \log n^2) = \theta(2n^2 \log n) = \theta(n^2 \log n)$$

■

فصل ۱۰

مرتب سازی

الگوریتم های مرتب سازی را از نظر نحوه مرتب سازی داده ها می توان به صورت زیر دسته بندی کرد:

۱- مرتب سازی مقایسه ای

در مرتب سازی مقایسه ای، اطلاعات دیگری از داده های ورودی وجود ندارد و فقط با مقایسه بین کلیدهای عناصر، ترتیب نسبی آنها پیدا می شود.

۲- مرتب سازی غیر مقایسه ای(خطی)

در مرتب سازی غیر مقایسه ای، بدون مقایسه کلیدهای عناصر با هم، عمل مرتب سازی انجام می شود. این الگوریتم ها با استفاده از اطلاعاتی که از قبل در خصوص نوع کلیدها موجود است و در شرایط خاص، از روش های سریعی استفاده می کند که در آنها کلیدهای عناصر با هم مقایسه نمی شوند.

در این فصل مرتب سازی های مقایسه ای را بررسی می کنیم. از مرتب سازی های غیر مقایسه ای مانند مرتب سازی "مبنایی، شمارشی و سطلی"، مرتب سازی مبنایی را بررسی می کنیم و مرتب سازی شمارشی و سطلی در کتاب طراحی الگوریتم اینجانب بررسی شده است.

مرتب سازی

مرتبه اجرایی مرتب سازی های مقایسه ای در جدول زیر نشان داده شده است.

نام روش	بهترین	میانگین	بدترین
Bubble	حبابی اصلاح شده $o(n)$	$o(n^2)$	$o(n^2)$
Selection	$o(n^2)$	$o(n^2)$	$o(n^2)$
Insertion	$o(n)$	$o(n^2)$	$o(n^2)$
Quick	$o(n.\log n)$	$o(n.\log n)$	$o(n^2)$
Merge	$o(n.\log n)$	$o(n.\log n)$	$o(n.\log n)$
Heap	$o(n.\log n)$	$o(n.\log n)$	$o(n.\log n)$
Tree	$o(n.\log n)$	$o(n.\log n)$	$o(n^2)$

مرتب سازی حبابی (Bubble Sort)

در این روش با n بار حرکت در طول آرایه، یک عنصر با عنصر بعدی مقایسه شده و در صورت لزوم جا به جا می‌شوند. بنابراین در مرتبه اول طی کردن آرایه، بزرگ‌ترین (یا کوچکترین) عنصر در انتهای آرایه قرار می‌گیرد . در این مرتب سازی ، در i امین مرتبه، عناصر $n - i$ تا n به طور صحیح قرار می‌گیرند.

مثال

اعداد 2 , 3 , 8 , 4 را به روش حبابی، صعودی نمایید.

حل: گذر اول به صورت زیر می باشد:

مقایسه ۴ با ۸ : 4 , 8 , 3 , 2

مقایسه ۳ با ۸ و تعویض آنها : 4 , 3 , 8 , 2

مقایسه ۸ با ۲ و تعویض آنها : 4 , 3 , 2 , 8

در پایان گذر اول ، بزرگترین عنصر در خانه آخر قرار گرفته است. گذر دوم به صورت زیر است:

مقایسه ۴ با ۳ و تعویض آنها : 3 , 4 , 2 , 8

مقایسه ۴ با ۲ و تعویض آنها : 3 , 2 , 4 , 8

گذر سوم:

مقایسه ۳ با ۲ و تعویض آنها : 2 , 3 , 4 , 8

عناصر داده شده بعد از ۳ گذر با ۶ مقایسه که ۵ تا از آنها منجر به تعویض شد، مرتب شدند.

تعداد مقایسه ها در روش مرتب سازی حبابی برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد که در بدترین حالت به همین تعداد، تعویض انجام می گیرد.

بزرگترین عنصر در مرتب سازی حبابی صعودی بعد از n-1 مقایسه و حداکثر n-1 تعویض بـه انتهـای لیست می رود.

الگوریتم مرتب سازی حبابی

```
void  Bubble-Sort (int  a[ ] , int  n){
   for( i=0 ; i < n-1 ; i++)
      for ( j = n-1 ; j > i ; j--)
         if (a[j] < a[j-1])
           swap(a[j] , a[j-1]);
}
```

در روش حبابی اصلاح شده از یک flag استفاده می شود. این flag در ابتدای ورود به حلقه چـک شـده و در صـورت مرتب شدن آرایه از ادامه تکرار حلقه جلوگیری می کند. مرتبه اجرایی مرتب سازی حبابی اصلاح شده در بهترین حالت برابر $o(n)$ می باشد.

مرتب‌سازی انتخابی (Selection Sort)

در مرتب‌سازی صعودی انتخابی، ابتدا کوچک‌ترین عنصر آرایه را پیدا کرده و آن را در مکان اول لیسـت قـرار می‌دهـد. آنگـاه کوچکترین عنصر دوم داخل لیست را پیدا کرده و آن را در مکان دوم لیست قرار می‌دهد و ...

مثال

تعداد مقایسه های لازم برای مرتب کردن لیست زیر به روش انتخابی را محاسبه نمایید.

10 , 30 , 17 , 12 , 1 , 21 , 15

حل: در ابتدا محل کوچک ترین عنصر یعنی 1 را با عنصر اول تعویض کرده و سپس محل کوچکترین عنصر دوم یعنی 10 بـا عنصر دوم تعویض می‌شود. به عبارتی در مرحله دوم کوچکترین عنصر آرایه 2 تا n پیدا شـده و محـل آن بـا عنصـر اول ایـن آرایه تعویض می شود. عملیات به همین روال ادامه می یابد.

لیست اولیه	**15**	**21**	**1**	**12**	**17**	**30**	**10**
مرحله اول	**15**	**21**	**10**	**12**	**17**	**30**	**1**
مرحله دوم	**15**	**21**	**30**	**12**	**17**	**10**	**1**
مرحله سوم	**15**	**21**	**30**	**17**	**12**	**10**	**1**
مرحله چهارم	**17**	**21**	**30**	**15**	**12**	**10**	**1**

مرحله پنجم	**1**	**10**	**12**	**15**	**17**	**21**	**30**
مرحله ششم	**1**	**10**	**12**	**15**	**17**	**21**	**30**

در مرحله اول برای پیدا کردن کوچکترین عنصر نیاز به شش مقایسه می باشد. در مرحله دوم برای پیدا کردن کوچکترین عنصر لیست جدید (از خانه ۲ تا انتها) به پنج مقایسه نیاز است و به همین ترتیبی تعداد مقایسه ها را بدست آورده و خواهیم داشت: 6+5+4+3+2+1=21

- در مرتب سازی انتخابی، اعداد بعد از n-1 مرحله مرتب می شوند.
- تعداد مقایسه ها در مرتب سازی انتخابی برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد.
- تعداد جابجایی ها در مرتب سازی انتخابی در بدترین حالت برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد. (بدترین حالت وقتی رخ می دهد که بخواهیم آرایه صعودی را نزولی کنیم و یا بر عکس)

الگوریتم مرتب سازی انتخابی

```
void   selectionsort (int  s[ ] , int n){
   int   i , j , min;
   for ( i = 0; i< n-1; i++){
        min = i;
        for (j = i+1; j <= n ; j++)
            if (s[j] < s[min])
                min = j;
        swap(s[i] , s[min]);
    }
}
```

مرتب‌سازی درجی (Insertion Sort)

این الگوریتم بر اساس درج یک عنصر در محل صحیح کار می‌کند. از ابتدای آرایه در بخشی از آن که ابتدا به طول ۱ سپس ۲، ۳،... n خواهد بود، آخرین عنصر این بخش و مقادیر قبل از آن تا جایی که این عنصر کوچکتر از آنهاست، به جلو جا به جا شده و این عنصر در محل مناسب درج می‌شود.

به عبارتی برای آرایه A با n عنصر:

۱ـ A[1] مرتب است.

۲ـ A[2] قبل یا بعد از A[1] درج می‌شود. طوری که A[1] و A[2] مرتب باشند.

۳ـ A[3] در مکان صحیح خود نسبت به A[1] و A[2] درج می‌شود، طوری که A[1],A[2],A[3] مرتب باشند.

۴ـ الی آخر

مثال

آرایه زیر را به روش درجی مرتب سازید.

20 , 5 , 35 , 8 , 2

حل:

درج ۲۰	**20**				
درج ۵	**5**	**20**			
درج ۳۵	**5**	**20**	**35**		
درج ۸	**5**	**8**	**20**	**35**	
درج ۲	**2**	**5**	**8**	**20**	**35**

به عبارتی الگوریتم مرتب سازی درجی الگوریتمی است که مرتب سازی را با درج رکوردها در یک آرایه مرتب شده موجود مرتب سازی می کند.

الگوریتم مرتب سازی درجی

می خواهیم n کلید موجود در آرایه s[1..n] را به ترتیب نزولی مرتب کنیم.

```
void   insertionsort (int  s[ ] , int   n){
    int   i,j; int  x;
    for (i=1 ; i<n ; i++){
        x = s[i];
        for( j = i-1 ;  j>=0  &&  x < s[j] ;  j--)
              s[j+1]=s[j];
        s[j+1]=x;
    }
}
```

تذکر: تنها فضایی که با n افزایش می یابد، اندازه آرایه ورودی s است. پس الگوریتم مرتب سازی درجی، یک مرتب سازی درجا است و فضای اضافی به $\theta(1)$ تعلق دارد.

- در مرتب سازی درجی، پیچیدگی زمانی تعداد انتساب های رکوردها، در بدترین حالت برابر $\frac{(n-1)(n+4)}{2}$ و در حالت میانگین برابر $\frac{n(n+7)}{4}-1$ می باشد.
- مرتب سازی درجی، برای یک آرایه مرتب، بهترین عملکرد و برای یک آرایه مرتب معکوس، بدترین عملکرد را دارد.
- مرتب سازی درجی برای n<=20 ، سریع‌ترین روش مرتب‌سازی است.

- اگر n بزرگ باشد و رکوردها هم بزرگ باشند (زمان انتساب آنها چشمگیر باشد)، مرتب سازی انتخابی باید بهتر از مرتب سازی درجی عمل کند.
- در مرتب سازی درجی، یک آرایه **n** عنصری را می توان با **n-1** عمل درج مرتب کرد.
- اگر از جستجویی دودویی استفاده کنیم، تعداد مقایسه‌ها کاهش می‌یابد. این روش را مرتب‌سازی **درجی دودویی** می‌نامند.

وارونگی

وارونگی در یک جایگشت، زوج (k_i, k_j) است به طوری که $i < j$ و $k_i > k_j$ باشد. به طور مثال، در جایگشت [3,2,4,1,6,5] ، زوج (3,2) یک وارونگی است، چون 2>1 و 3>2 . وارونگی های این جایگشت عبارتند از: (3,1) , (3,2) , (6,5) , (4,1) , (2,1).

مرتب سازی n کلید متمایز، به معنی حذف همه وارونگی ها در یک جایگشت است.

مرتب سازی درجی پس از هر بار مقایسه، یا کاری انجام نمی دهد یا کلید موجود در محل j ام را به محل (j+1) ام منتقل می کند. با منتقل کردن کلید موجود در محل j ام به یک محل بالاتر، این واقعیت را تصحیح کرده ایم که x باید قبل از آن کلید بیاید. ولی، این تنها کاری است که انجام داده ایم. نشان می دهیم همه الگوریتم های مرتب سازی که فقط از طریق مقایسه کلیدها مرتب سازی را انجام می دهند و چنین مقدار محدودی از باز آرایی را پس از هر بار مقایسه انجام می دهند، حداقل به زمان درجه دوم نیاز دارند. فرض کنیم که کلیدها صرفاً اعداد مثبت و صحیح n ، ... ، ۲، ۱ هستند، زیرا می توانیم کوچک ترین کلید را با ۱، دومی را با ۲ و ... جایگزین کنیم.

یک جایگشت، وارونگی نخواهد داشت اگر و فقط اگر دارای ترتیب مرتب [1,2,...,n] باشد.

مرتب سازی ادغام (Merge Sort)

در این روش آرایه n عنصری به n قسمت به طول یک تقسیم و سپس هر دو قسمت مجاور به صورت مرتب شده با هم ادغام می‌شوند. در این حالت آرایه به طول ۲ ایجاد شده است. روند ادغام تا رسیدن به یک آرایه به طول n ادامه می‌یابد. قبل از توضیح عملکرد این مرتب سازی، نحوه ادغام دو آرایه مرتب را در یک آرایه مرتب جدید بیان می کنیم.

مثال

دو آرایه مرتب A و B را ادغام کرده و حاصل را در آرایه C قرار دهید:

A : 1, 5 , B : 2, 7, 9, 20

حل: برای اینکار از ۳ متغیر اشاره گر pa وpb وpc استفاده می شود که ۲ تای خاص از آنها با یکدیگر تغییر می کنند. در ابتدا pa به مقدار ۱ در آرایه A و pb به مقدار ۲ در آرایه B وpc به ابتدای آرایه خالی C اشاره می کند. محتوای pa و pb با هم مقایسه شده و چون مقدار ۱ کوچکتر است در آرایه C نوشته شده و اشاره گر pa و pc یک واحد اضافه شده و مقدار ۵ با ۲ مقایسه شده و چون ۲ کوچکتر است در آرایه C نوشته شده و pb و pc یک واحد اضافه می شوند .حال مقدار ۵ با ۷ مقایسه شده و مقدار ۵ در آرایه c نوشته شده و در این حالت چون به انتهای آرایه A رسیده ایم بقیه عناصر آرایه B را به انتهای آرایه C اضافه می کنیم: C : 1 , 2 , 5 , 7 , 9 , 20

حداکثر تعداد مقایسه ها برای ادغام دو آرایه مرتب n , m عنصری برابر n+m-1 می باشد.

مثال

لیست داده شده در روش Merge Sort ، بعد از چند گذر مرتب می شود؟

2 , 3 , 1, 7 , 6 , 5, 4, 0

حل:

[2] [3] [1] [7] [6] [5] [4] [0]
[2,3] [1,7] [5,6] [0,4]
[1,2,3,7] [0,4,5,6]
[0,1,2,3,4,5,6,7]

مثال

لیست مقابل را به روش Merge Sort ، مرتب نمایید.

25 , 4 , 70 , 2 , 63 , 11 , 57 , 12 ,45

حل:

[25] [4] [70] [2] [63] [11] [57] [12] [45]
[4 25] [2 70] [11 63] [12 57] [45]
[2 4 25 70] [11 12 57 63] [45]
[2 4 11 12 25 57 63 70] [45]
[2 4 11 12 25 45 57 63 70]

تعداد گذرهای مرتب سازی ادغام برابر $\lceil \lg n \rceil$ است.

الگوریتم مرتب سازی ادغامی بازگشتی

در نسخه بازگشتی، ساختار رکورد به صورت زیر تعریف می کنیم:

```
typedef  struct{  int  key;  int  link; }element;
```

تابع merge یک مقدار صحیح را بر می گرداند که به ابتدای لیست مرتب شده اشاره دارد.

```
int  merge(element  list[ ] , int   lower , int   upper){
  int  mid;
  if (lower >= upper)  return  lower;
  else{
   mid = (lower + upper) /2;
   return  listmerge ( list , merge( list , lower , mid) , merge( list , mid+1 , upper));
  }
}
```

تابع listmerge دو زنجیر یا لیست مرتب شده یعنی first و second را دریافت کرده و مقدار صحیح کـه بـه ابتـدای زنجیـر مرتب شده جدید شامل زنجیره های first و second اشاره دارد را برمی گردانـد. بـر خـلاف نسـخه تکـراری ادغـام، نسـخه بازگشتی از لحاظ فیزیکی لیست را تغییر یا دوباره مرتب نمی کند.

```
int   listmerge (element   list[ ] , int   first , int  second){
  int  start = n;
  while(first != -1  &&  second != -1)
    if ( list[first].key <= list[second].key )
     {
        list[start].link = first;
        start = first;
        first = list[first].link;
     }
    else{
        list[start].link = second;
        start = second;
        second = list[second].link;
      }
   if (first == -1)
        list[start].link =second;
    else    list[start].link = first;
  return  list[n].link;
}
```

فراخوانی تابع به صورت start = merge(l ist , 0 , n-1) است.

در مرتب سازی ادغام ، مراحل کار به صورت زیر می باشد:

۱- تقسیم لیست n عنصری به دو زیر لیست $\frac{n}{2}$ عنصری.

۲- مرتب کردن بازگشتی دو زیر لیست به روش مرتب سازی ادغام در زمان $2T(\frac{n}{2})$.

۳- ادغام دو زیر لیست مرتب شده در زمان $\theta(n)$.

که رابطه بازگشتی آن به صورت زیر می باشد:

$$T(n)=\begin{cases}2T(\frac{n}{2})+\theta(n) & n>1\\ \theta(1) & n=1\end{cases}$$

مرتبه اجرایی این رابطه $o(n.\log n)$ می باشد.

پیچیدگی زمانی تعداد مقایسه های کلیدها در مرتب سازی ادغامی در بدترین حالت، وقتی که n توانی از دو است به صورت $W(n) = n\lg n - (n-1)$ است و به طور کلی به $\theta(n\lg n)$ تعلق دارد.

الگوریتم های $\theta(n\lg n)$ می توانند از عهده ورودی های بسیار بزرگ برآیند، حال آنکه الگوریتم های $\theta(n^2)$ نمی توانند.

گاهی مرتب سازی ادغامی پس از هر مقایسه بیش از یک وارونگی را حذف می کند. الگوریتم هایی که حداکثر یک وارونگی پس از هر مقایسه انجام می دهند، حداقل $\frac{n(n-1)}{2}$ مقایسه را در هنگامی که ورودی به ترتیب عکس باشد، انجام می دهند.

مرتب سازی ادغام، معمولاً روی عناصری که در فایل‌ها قرار دارند اجرا می‌شود.

مرتب سازی ادغام از حافظه جانبی استفاده می‌کند و نیاز به بافری به اندازه n دارد. (غیر درجا) در حالت معمول، استفاده از فضای اضافی به $\theta(n)$ رکورد تعلق دارد.

مرتب سازی ادغامی (غیر بازگشتی)

```
void  merge-sort(int  a[ ] , int  n){
  int  len=1;
  int  extra[ MAX];
  while(len < n) {
     merge-pass(a , extra , n , len);
     len=len *2;
     merge-pass(extra , a , n , len);
     len = len *2;
    }
}
```

در merge-sort ، در اولین گذر، لیست هایی با اندازه 1 ، در دومین گذر لیست هایی با اندازه 2 و در i امین گذر لیست هایی با اندازه 2^{i-1} ادغام خواهند شد.

```
void  merge-pass(int  a[ ] , int  s [ ] , int n , int len){
 int  i , j;
 for ( i=0 ; i <= n-2*len ; i = i+2*len )
    merge( a , s , i , i+len-1 , i+2*len-1 );
 if ( i+len < n)
     merge( a , s , i , i+len-1 , n-1 );
 else
     for ( j = i ;  j < n; j++)   s[j] = a[j];
}

void  merge( int  a[ ] , int  s[ ] , int i  , int m , int n){
   int   j , k , t;
   j = m+1;
   k = i;
   while( i <=  m  &&  j <= n ) {
     if ( a[i] <= a[j] )
         s[k++] = a[i++];
     else
         s[k++] = a[j++];
   }
  if ( i > m)
    for( t = j ; t <= n ; t++ )
        s[k+t-j] = a[t];
   else
       for( t = i ; t <= m ; t++ )  s[k+t-i] = a[t];
}
```

تابع merge ، لیستهای مرتب شده (a[i],...,a[m]) و (a[m+1],...,a[n]) را در یک لیست مرتب شده یعنی (s[i],...,s[n]) ادغام می نماید.

مرتب‌سازی سریع (Quick Sort)

یک عنصر به عنوان محور انتخاب شده(معمولا عنصر اول) و سایر عناصر در آرایه به صورتی جا به جا می‌شوند که کلیه عناصر کوچکتر از محور در یک طرف و کلیه عناصر بزرگ‌تر از محور در طرف دیگر قرار گیرند، سپس به همین روش دو آرایه واقع در طرفین محور به صورت بازگشتی مرتب می‌شوند.

الگوریتم مرتب سازی سریع

```
QUICKSORT(A , p , r){
  if ( p < r)  {
    q = PARTITION(A , p , r);
    QUICKSORT (A , p , q-1);
    QUICKSORT (A , q+1, r);
  }
}
```

برای مرتب سازی کل آرایه A، فراخوانی اولیه QUICKSORT(A ,1 , length[A]) است.

```
PARTITION(A , p , r ){
  x = A[r];
  i = p-1;
  for (j = p ; j<= r-1 ; j++)
    if  (A[j] <= x)       {
        i++;
        exchange( A[i] , A[j] );
     }
  exchange ( A[i+1] , A[r] );
  return  i+1;
}
```

- زمان اجرای PARTITION روی A[p..r] برابر $\theta(n)$ است که $n = r - p + 1$.
- رابطه بازگشتی مرتب سازی سریع $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \theta(n)$ می باشد که مرتبه اجرایی آن $o(n.\log n)$ می باشد.

البته ممکن است در بدترین حالت(آرایه مرتب) آرایه به دو قسمت به طول صفر و n-1 تقسیم شده و در این حالت رابطه بازگشتی به صورت $T(n) = T(n-1) + \theta(n)$ است که مرتبه اجرایی آن $o(n^2)$ می باشد.

مثال

مراحل اجرای تابع PARTITION بر روی یک آرایه نمونه:

عناصری که به رنگ طوسی می باشند در قسمت اول بوده و مقادیر آنها کوچکتر یا مساوی 4 است. عناصری که پر رنگ تر می باشند در قسمت دوم هستند و مقادیر آنها بزرگ تر از x است. عناصری که نه طوسی رنگ هستند و نه پر رنگ، هنوز در هیچ یک از دو قسمت قرار نگرفته اند.

(a) : هیچ یک از عناصر تقسیم بندی نشده اند.

(b) : مقدار 2 با خودش تعویض و در قسمت مقادیر کوچکتر قرار گرفته است.

(c) : مقدار 8 به قسمت مقادیر بزرگتر اضافه شده است.

(d) : مقدار 7 به قسمت مقادیر بزرگتر اضافه شده است.

(e) : مقادیر 1 و8 تعویض شده اند و قسمت کوچکتر افزایش می یابد.

(f) : مقادیر 3 و8 عوض شده و قسمت کوچکتر افزایش می یابد.

(g) : مقدار 5 به قسمت بزرگتر اضافه شده است.

(h) : مقدار 6 به قسمت بزرگتر اضافه شده است و حلقه پایان می یابد.

(i) : عنصر محوری عوض شده تا بین دو قسمت قرار بگیرد.

(a)	2	8	7	1	3	5	6	4
(b)	2	8	7	1	3	5	6	4
(c)	2	**8**	7	1	3	5	6	4
(d)	2	**8**	**7**	1	3	5	6	4
(e)	2	1	**7**	**8**	3	5	6	4
(f)	2	1	3	**8**	**7**	5	6	4
(g)	2	1	3	**8**	**7**	**5**	6	4
(h)	2	1	3	**8**	**7**	**5**	**6**	4
(i)	2	1	3	4	**7**	**5**	**6**	**8**

الگوریتم Quick sort برای آرایه مرتب ، بدترین عملکرد را دارد و تعداد مقایسه های در این حالت برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد.

مزیت مرتب سازی سریع نسبت به ادغامی این است که نیازی به آرایه اضافی ندارد. ولی هنوز هم یک مرتب سازی درجا نیست، زیرا در حالی که الگوریتم، زیر آرایه نخست را مرتب سازی می کند، اندیس اول و آخر زیر آرایه دیگر باید در پشته رکوردهای فعالیت نگهداری شوند.

- در مرتب سازی سریع بر خلاف ادغامی، تضمینی وجود ندارد که آرایه همواره از وسط تقسیم شود. در بدترین حالت، ممکن است partition مکرراً آرایه را به زیر آرایه تهی در سمت چپ (یا راست) و زیرآرایه ای با یک عنصر کمتر در سمت راست (یا چپ) تقسیم کند. به این ترتیب، (n-1) جفت اندیس در پشته قرار می گیرند، بنابراین استفاده از فضای اضافی در بدترین حالت به $\theta(n)$ تعلق دارد. می توان مرتب سازی سریع را چنان اصلاح کرد که استفاده از فضای اضافی حداکثر در حدود $\lg n$ باشد.
- در Randomized-Quicksort ، محور به صورت تصادفی و با احتمال یکسان، یکی از عناصر انتخاب می شود و بقیه ی الگوریتم مانند Quick Sort عادی است.
- اگر نمودار میانگین زمانی را رسم کنید، مشاهده می شود که به ازای $n \leq 20$ ، مرتب سازی درجی سریع ترین است. برای مقادیر بین 20 تا 45 ، مرتب سازی سریع بهترین و سریعترین می باشد. برای مقادیر بزرگتر، مرتب سازی ادغام سریع ترین است.

بنابراین، بهتر است در مرتب سازی ادغامی برای زیرلیست های کمتر از 45 از مرتب سازی سریع استفاده شود. همچنین در مرتب سازی سریع، زمانی که طول زیر لیست ها کمتر از 20 باشند، از مرتب سازی درجی استفاده کند.

مرتب‌سازی هیپ (Heap Sort)

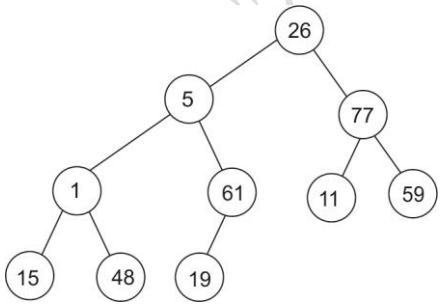
در مرتب سازی heap، ساختار maxheap مورد استفاده قرار می گیرد. یک درخت heap با n رکورد با استفاده از تابع adjust ایجاد می شود. سپس رکوردها یکی یکی از heap خارج می شوند.

تابع adjust از یک درخت دودویی که زیردرختهای چپ و راست آن خاصیتheap را برآورده می کنند، استفاده می کند. (به غیر از ریشه) همچنین این تابع درخت را بگونه ای تنظیم می کند که کل درخت دودویی خاصیت heap را برآورده می کند.

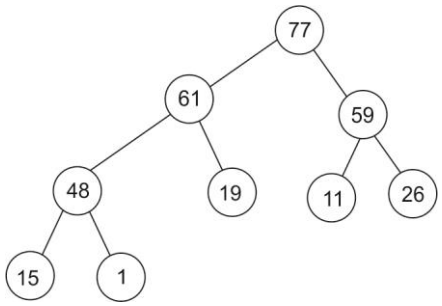
برای مرتب سازی یک لیست، n-1 گذر بر روی لیست اعمال می گردد. در هر گذر، اولین رکورد در heap با آخرین رکورد تعویض می شود. چون اولین رکورد، همیشه شامل بزرگترین کلید است، این رکورد با بزرگتترین کلید را در محل n ام قرار می دهیم. در گذر دوم، رکورد با دومین کلید بزرگ را در موقعیت n-1 قرار می دهیم و در نهایت، در i امین گذر، رکورد با i امین کلید بزرگ را در موقعیت n-i+1 قرار می دهیم.

مثال

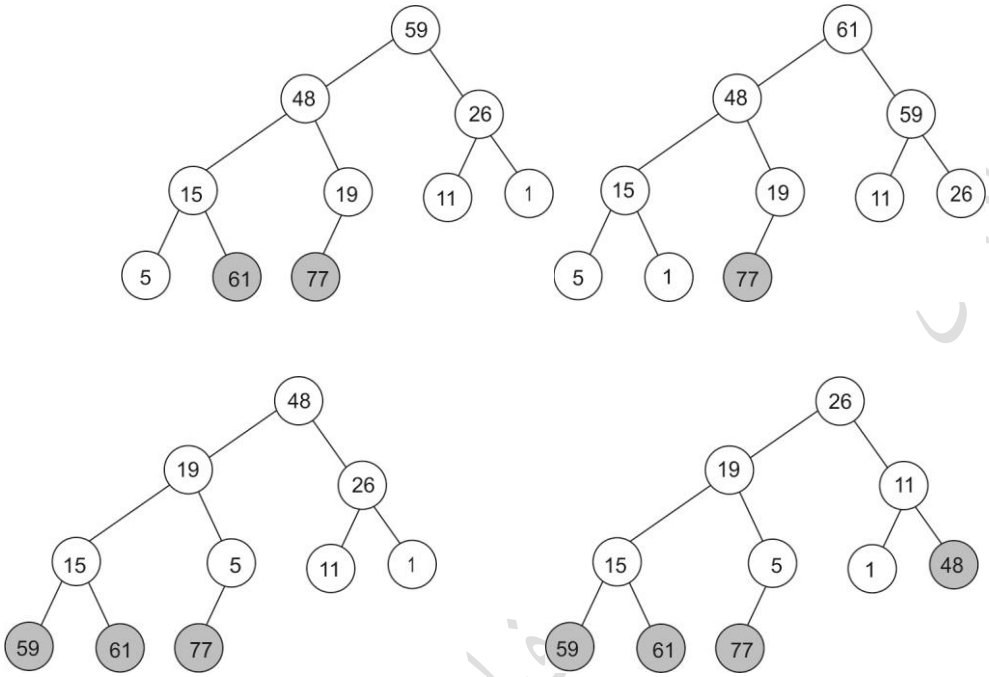
لیست ورودی (19 , 48 , 15 , 59 , 11 , 61 , 1 , 77 , 5 , 26) را در نظر بگیرید. شکل زیر درخت دودویی اولیه را نشان می دهد:



بعد از تبدیل آن به maxheap داریم:



فرایند مرتب سازی در زیر نشان داده شده است. دایره های پر رنگ رکوردهایی که در موقعیت مرتب شده خـود قـرار گرفتـه اند را نشان می دهد.



تابع مرتب سازی Heap

```
void  heapsort( int  a[ ] , int  n ){
  int  i , j;
  for ( i = n/2 ; i>0 ; i--)
     adjust( a , i , n);
  for( i = n-1 ; i>0 ; i--)
    {
     swap( a[1] , a[i+1] , temp );
     adjust( a , 1, i );
    }
}
```

```
void  adjust( int   a[ ] , int   root , int  n )
{
   int   child , rootkey, temp;
   temp = a[root];
   rootkey  = a[root];
   child =2 * root;
   while(child <= n)
    {
        if (( child <n) && (a[child] < a[child+1]) )
            child++;
        if ( rootkey > a[child] )   break;
       else{
             a[child / 2] = a[child];
             child = child *2;
            }
     }
   a[child / 2] = temp;
}
```

در حلقه for اول در تابع heapsort ، تابع adjust یکبار به ازای همه گره ها که دارای یک فرزند هستند، فراخوانی می شود. زمان این حلقه بیشتر از $O(n)$ نمی باشد. در حلقه for دوم، تابع adjust به تعداد $(n-1)$ مرتبه با حداکثر عمق $\lceil \log(n+1) \rceil$ فراخوانی می شود. بنابراین زمان آن $O(n\log n)$ می باشد. در نتیجه کل زمان محاسباتی $O(n\log n)$ خواهد شد.

در صورتی که بخواهیم k آرایه مرتب صعودی را ادغام کرده و در یک آرایه مرتب ذخیره کنیم، با فرض اینکه کل خانه های آرایه ها برابر n باشد، نیاز به $n(k-1)$ مقایسه می باشد و زمان ادغام برابر $O(n.k)$ است. در این روش عنصر اول آرایه ها با یکدیگر مقایسه شده و با $(k-1)$ مقایسه کوچکترین عنصر خارج شده و آرایه ای که عنصر مینیمم از آن خارج شده را به سمت بالا حرکت می دهیم(رانش) و عملیات را ادامه می دهیم. برای ادغام بهتر است از MinHeap استفاده کرد که به زمان $O(n.\log k)$ نیاز است.

مرتب سازی درختی (Tree Sort)

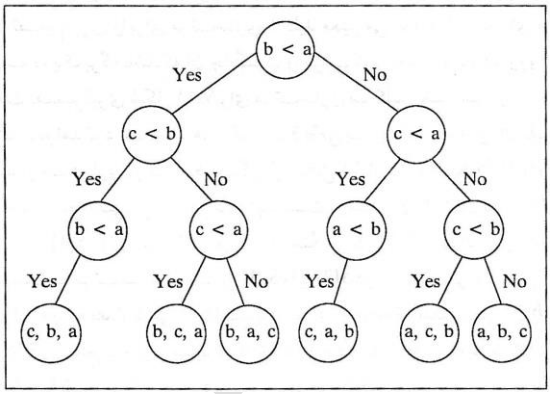
ابتدا با اعداد داده شده یک BST ساخته و سپس با پیمایش میانوندی درخت حاصل، رشته صعودی حاصل می شود. این موضوع در مبحث BST بررسی شد.

الگوریتم های پایدار (stable)

الگوریتمهای مرتب سازی که ترتیب اولیه رکوردهای هم کلید را حفظ می کنند، پایدار نام دارند. در این الگوریتم ها اعداد با مقدار یکسان در آرایه خروجی به همان ترتیبی که در آرایه ورودی هستند ظاهر می شوند. به عبارتی یک الگوریتم مرتب سازی را **پایدار** گوئیم هر گاه در انتهای روش، عناصر یکسان، به همان ترتیب اولیه در آرایه مرتب نشده، ظاهر بشوند. این ویژگی وقتی مهم است که عناصر مرتب شده همراه با داده های وابسته باشند. فرض کنید می خواهیم چند نفر را بر اساس سن با یک الگوریتم پایدار مرتب کنیم. اگر دو نفر با نام های الف و ب همسن باشند و در لیست اولیه الف جلوتر از ب آمده باشد، در لیست مرتب شده هم الف جلوتر از ب آمده باشد. الگوریتم های پایدار عبارتند از : حبابی، درجی، مبنا، ادغام، درختی و شمارشی.

درخت تصمیم گیری برای الگوریتم های مرتب سازی

متناظر با هر الگوریتم قطعی برای مرتب سازی n کلید، حداقل یک درخت تصمیم گیری معتبر وجود دارد. در شکل زیر درخت تصمیم گیری متناظر با مرتب سازی تعویضی، در هنگام مرتب سازی سه کلید رسم شده است:



در درخت بالا، گره سطح ۲ حاوی مقایسه "b<a" هیچ فرزند راستی ندارد. چون پاسخ No به به آن مقایسه، پاسخ هایی را نقض میکند که روی مسیر منتهای به آن گره به دست می آید.

چند نکته:

۱- تعداد مقایسه های انجام شده توسط یک درخت تصمیم گیری در بدترین حالت برابر با عمق درخت است.

۲- هر الگوریتم قطعی که n کلید متمایز را فقط با مقایسه کلیدها مرتب سازی می کند، باید در بدترین حالت حداقل $\lceil \lg(n!) \rceil$ مقایسه کلیدها را انجام دهد.

۳- درخت تصمیم گیری که فقط از طریق مقایسه کردن عمل مرتب سازی را انجام می دهد، دارای $n!$ برگ است.

مرتب سازی مبنا (Radix Sort)

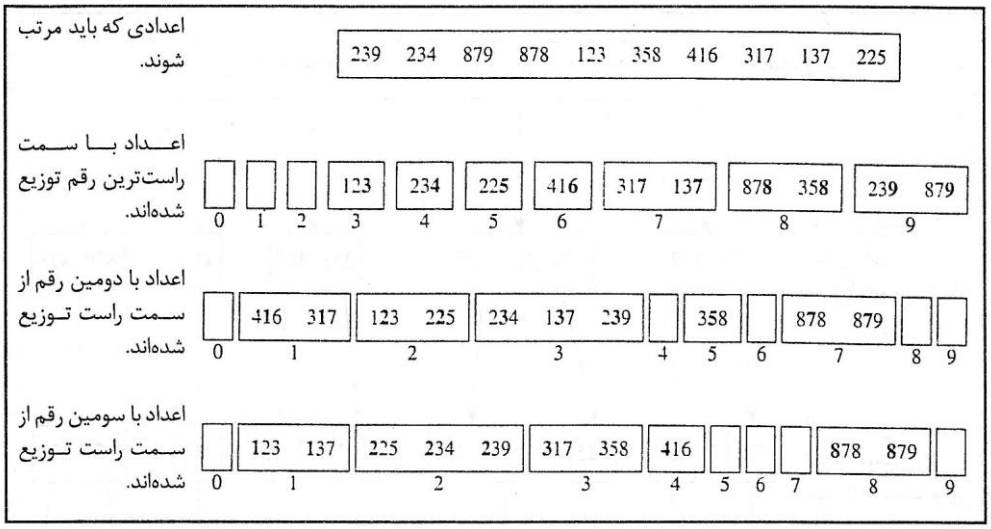
در مرتب سازی مبنا (توزیعی)، با فرض اینکه اعداد در مبنای 10 باشند، در گذر اول اعداد بر حسب اولین رقم سمت راست مرتب می شوند و در گذر دوم بر طبق دومین رقم از سمت راستشان و به همین روال مرتب سازی ادامه می یابد.(این نوع مرتب سازی مقایسه ای نمی باشد)

مثال

اعداد زیر را به روش مرتب سازی مبنایی، مرتب نمایید.

239 , 234 , 879 , 878 , 123 , 358 , 416 , 317 , 137 , 225

حل: چون مبنا 10 است، ده گروه از 0 تا 9 در نظر می گیریم. ارقام را از راست به چپ بازرسی کرده و هر کلید را در گروه متناظر با رقمی که در حال حاضر بازرسی می شود، قرار می دهیم. بعد از پایان گذر اول، اعداد بر حسب اولین رقم سمت راست مرتب شده اند. بعد از پایان گذر دوم، اعداد بر حسب دومین رقم سمت راست مرتب شده اند و .... این روال در شکل زیر نشان داده شده است.



با هر بار گذر، اگر دو کلید باید در یک گروه قرار گیرند، کلیدی که از گروه واقع در منتها الیه سمت چپ در گذر قبلی می آید، در طرف چپ کلید دیگر قرار می گیرد. به عنوان مثال بعد از اولین گذر، کلید 416 در گروه واقع در چپ کلید 317 قرار دارد. بنابراین، هنگامی که در دومین گذر، هر دو آن ها در گروه اول قرار بگیرند، کلید 416 در طرف چپ کلید 317 قرار می گیرد. ولی در گذر سوم، کلید 416 به طرف راست کلید 317 می رود، چون در گروه چهارم قرار داده می شود، سپس کلید 317 در گروه سوم قرار داده می شود.

مرتب سازی مبنا n عدد d رقمی که در آنها هر رقم می تواند تا k مقدار ممکن را بگیرد در زمان $\theta(d(k+n))$ مرتب می کند.

کنکور ارشد

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۷)

۱- در الگوریتم مرتب سازی حبابی (یا تبادلی) فرض می کنیم T(n) تعداد دستورالعمل مقایسه باشد. در این صورت T(n) کدام است؟

۱) $T(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ ۲) $T(n)=2n-1$

۳) $T(n)=\frac{n(n-1)}{2}$ ۴) $T(n)=\frac{n^2}{2}-1$

حل: جواب گزینه ۳ است.

تعداد مقایسه ها در روش مرتب سازی حبابی برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد.

(علوم کامپیوتر- دولتی ۸۹)

۲- اگر برای مرتب سازی آرایه ی زیر به صورت صعودی از الگوریتم Bubble Sort استفاده شود، چند عمل مقایسه و چند عمل جابه جایی صورت می گیرد؟ {3 , 5 , 2 , 1, 4 , 7}

۱) 3 عمل جابه جایی و 30 عمل مقایسه صورت می گیرد.

۲) 3 عمل جابه جایی و 15 عمل مقایسه صورت می گیرد.

۳) 6 عمل جابه جایی و 14 عمل مقایسه صورت می گیرد.

۴) 30 عمل جابه جایی و 30 عمل مقایسه صورت می گیرد.

حل: جواب گزینه ۳ است.

تعداد مقایسه ها در روش مرتب سازی حبابی برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد که در بدترین حالت به همین تعداد، تعویض انجام می گیرد. بنابراین با قرار دادن 6 به جای n در این رابطه، عدد 15 حاصل می شود. بنابراین گزینه های ۱و۴ که اعداد بزرگتر از 15 دارند، حتما نادرست می باشند. این آرایه در ۳ گذر مرتب می شود.

گذر اول:

آرایه اولیه : 3 , 5 , 2 , 1 , 4 , 7

3 , 2 , 5 , 1 , 4 , 7
3 , 2 , 1 , 5 , 4 , 7
3 , 2 , 1 , 4 , 5 , 7

گذر دوم:

2 , 3 , 1 , 4 , 5 , 7
2 , 1 , 3 , 4 , 5 , 7

گذر سوم:

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 7

مشخص است که 6 جابه جایی لازم است. بنابراین گزینه ۳ درست است.

(مهندسی کامپیوتر- دولتی ۸۹)

۳- می دانیم که هزینه ی الگوریتم مرتب سازی درجی برای مرتب سازی آرایه ی A با n عنصر متناسب با تعداد وارونگی(inversion) های عناصر آن آرایه است. زوج (i,j) را یک عدد وارونگی می گوییم اگر i<j و A[i]>A[j] . با فرض احتمال این که یک زوج اندیس دلخواه از A یک وارونگی باشد برابر $\frac{1}{2}$ است، میانگین تعداد وارونگی های یک آرایه ی A با عناصر متمایز چقدر است؟

۱) $\frac{n^2-n}{2}$ ۲) $\frac{n^2}{2}$ ۳) $\frac{n^2}{4}$ ۴) $\frac{n^2-n}{4}$

حل: جواب گزینه ۴ است.

تعداد حالت هایی که می توان دو عنصر را از بین n عنصر انتخاب کرد برابر است با:

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین میانگین تعداد وارونگی ها با احتمال $\frac{1}{2}$ برابر است با: $\frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{4}$

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۶)

۴- اگر در مرتب سازی سریع، زیر لیست های کوچکتر در ابتدا مرتب شوند، پشته بازگشتی دارای چه عمقی خواهد بود؟

۱) $o(n)$ ۲) $o(n^2)$ ۳) $o(\log n)$ ۴) $o(1)$

حل: جواب گزینه ۱ است.

اگر در روش Quick Sort ، داده ها هر بار به طور مساوی تقسیم شوند، حداکثر عمق درخت بازگشتی logn بوده و به فضای پشته $o(\log n)$ نیاز خواهد بود. اما در بدترین حالت یعنی وقتی داده ها به قسمتهای به طول n-1 و صفر تقسیم شده باشد، فضای پشته $o(n)$ خواهد بود.

(مهندسی کامپیوتر- آزاد ۸۹)

۵- الگوریتمی را پایدار گوییم هر گاه ترتیب عناصر مساوی بعد از مرتب سازی عوض نشود. کدام یک از الگوریتم های زیر پایدار هستند؟

۱) سریع و درجی ۲) ادغامی و درجی ۳) سریع و ادغامی ۴) هرمی و درجی

حل : جواب گزینه ۲ است.

مرتب سازی سریع و هرمی(Heap) پایدار نمی باشند، بنابراین گزینه های ۱و۳و۴ نادرست می

باشند.

(علوم کامپیوتر - دولتی ۸۹)

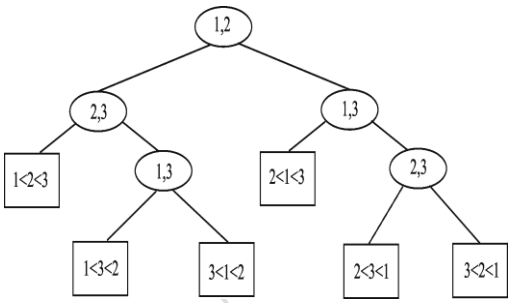
۶- یک الگوریتم مرتب سازی بر مبنای درخت تصمیم گیری، حداقل دارای چه تعداد مقایسه خواهد بود؟ فرض کنید $(a = \log_2^{n!}, b = n\log n, c = \log n =, d = n)$

۱) a ۲) a,b ۳) a,c ۴) b,d

حل: جواب گزینه ۲ است.یک درخت تصمیم گیری برای مرتب سازی n عنصر، دارای ارتفاع $\log n!$ می باشد و از آنجا که $\log n!$ از نظر پیچیدگی با $n\log n$ برابر است، جواب گزینه ۲ می باشد.(n! تعداد برگ های این درخت است.)

(مهندسی IT- دولتی ۸۴)

۷- یک درخت دودویی تصمیم‌گیری را در نظر بگیرید که از آن برای مرتب کردن عناصر یک مجموعه براساس عمل مقایسه، استفاده می‌شود. برای مثال درخت روبرو، برای مرتب کردن یک فایل با سه عضو، استفاده می‌شود. کدام یک از گزاره‌های ذیل، در مورد این نوع درخت‌ها درست است؟



۱) عمق این نوع درخت‌ها، حداقل $\log_2(n!)$ است و در گروه $o(n.\log n)$ قرار می‌گیرد.

۲) عمق این نوع درخت‌ها، حداکثر $\log_2(n!)$ است و در گروه $o(n.\log n)$ قرار می‌گیرد.

۳) عمق این نوع درخت‌ها، حداکثر $\log_2(n!)$ است و حداقل $o(n.\log n)$ مقایسه در آنها انجام می‌شود.

۴) عمق این نوع درخت‌ها، حداقل $\log_2(n!)$ است و حداکثر $o(n.\log n)$ مقایسه در آنها انجام می‌شود.

حل: جواب گزینه ۱ است.

عمق درخت تصمیم گیری، حداقل برابر $\log_2(n!)$ می باشد. همچنین می دانیم که به جای $n!$ می توان n^n نوشت و به همین علت $\log_2(n!)$ در گروه $o(n.\log n)$ قرار می‌گیرد.

فصل ۱۱

درهم سازی

در کاربردهایی لازم است تا اعمال حستجو، درج و حذف بر روی مجموعه پویایی از داده ها انجام شود. هزینه اعمال **"جستجو، درج و حذف"** بر روی مجموعه ای n عنصری در ساختمان داده های لیست یا BST در بدترین حالت $O(n)$ و بسیار کند است. البته با بهبود BST این اعمال در بدترین حالت در $O(\lg n)$ انجام می شود. با استفاده از ساختمان داده **جدول درهم سازی** (hashing table) و روش درهم سازی(hashing)، هزینه هر کدام از این اعمال، در بدترین حالت و نیز در حالت میانگین می تواند $O(1)$ شود.

جدول آدرس دهی مستقیم

در آدرس دهی مستقیم(direct address) ، هر عنصر را بر حسب مقدار کلیدش مستقیما در یک آرایه T ذخیره می کنیم. برای نمایش مجموعه پویایی از عناصر از جدول آدرس دهی مستقیم (T[0..m-1]) استفاده می کنیم. در این آرایه داریم:

$$K \subseteq \{0,1,\ldots,m-1\}$$

$$T(k) = \begin{cases} x & k \in K, key[x] = k \\ null & \end{cases}$$

در آدرس دهی مستقیم، اعمال "درج، حذف و جستجو" در $O(1)$ انجام می شود.

جدول های درهم سازی

مشکل آدرس دهی مستقیم این است که m می تواند بسیار بزرگ باشد و ساخت یک جدول با اندازه بزرگ ناممکن است. برای حل این مشکل از جدول درهم سازی استفاده می کنیم. در این روش جدول را به اندازه قابل پیاده سازی m در نظر می گیریم و عنصر x با کلید k=key[x] را در درایه h(k) ذخیره می کنیم. که h یک تابع درهم سازی(hash function) است. مقدار h(k) به ازای یک کلید k ، یک عدد صحیح بین 0 و m-1 است.

برخورد (collision)

در جدول درهم سازی، ممکن است بیش از یک عنصر به یک درایه خاص نگاشته شود. به این مشکل برخورد (collision) می گویند. به عبارتی برخورد وقتی رخ می دهد که پس از اعمال تابع درهم سازی، به ازای دو کلید متفاوت، آدرس یکسانی تولید شود. نمی توان تابع درهم سازی انتخاب کرد که اصلا برخوردی نداشته باشد. بنابراین باید این مشکل را حل کرد. می توان به کمک روش های زنجیره ای یا آدرس دهی باز مشکل برخورد را حل کرد.

توابع درهم سازی

یک تابع درهم ساز یک کلید را به عنوان ورودی گرفته و یک آدرس را به عنوان خروجی بر می گرداند. یک تابع درهم سازی خوب،تابعی است که ساده و یکنوا باشد. یعنی هر عنصر با احتمال مساوی در هر یک از درایه های جدول قرار می گیرد.

یکی از توابع درهم ساز، تابع تقسیم نام دارد. در این روش، تابع درهم سازی برابر باقیمانده ی تقسیم یک کلید k بر m در نظر گرفته می شود. یعنی، $h(k) = k \mod m$. که m نباید توانی از دو باشد. یک عدد اول که نزدیک به توانی از دو نباشد، انتخاب مناسبی برای m است.

مثال

اگر در حدود 2000 کلید رشته ای داشته باشیم و برای پیدا کردن کلید مورد نظر، به طور میانگین 3 عنصر را بگردیم، بهتر است اندازه جدول را چند بگیریم؟

پاسخ:

بهتر است اندازه جدول را 701 بگیریم، چون یک عدد اول نزدیک به $2000/3$ است. در این صورت، یک رشته را به یک عدد k تبدیل و از تابع درهم سازی $h(k) = k \mod 701$ استفاده می کنیم.

■

مثال

با فرض $k_i = i^2$ برای $i = 1..15$ و $h(k_i) = i^2 \mod 7$ ، تعداد برخوردها را مشخص کنید.

پاسخ:

به عبارتی کلیدها $1^2, 2^2, ..., 15^2$ و تابع درهم ساز $h(x) = x \mod 7$ است. برای ساده شدن کار می توان برای محاسبه $k^2 \bmod 7$ ، عبارت $(k \mod 7)^2 \bmod 7$ را محاسبه کرد. چون طبق رابطه مقابل این دو با هم معادل اند:

$$ab \mod m = (a \mod m)(b \mod m) \bmod m$$

بنابراین داریم:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$i \mod 7$	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1
$(i \mod 7)^2 \mod 7$	**1**	**4**	**2**	**2**	**4**	**1**	**0**	1	4	2	2	4	1	0	1

در نتیجه تعداد برخوردها در درایه های مختلف به صورت زیر است:

0	1	2	3	4	5	6
2	5	4	0	4	0	0

اگر در این مثال،کلیدها $1^2, 2^2, ..., 98^2$ بودند، تعداد برخوردها در هر درایه چگونه بود؟

پاسخ:

خروجی تابع درهم ساز به طور متناوب اعداد 1,4,2,2,4,1,0 می باشد. تعداد تکرار هر یک از اعداد 0 تا 6 در این دنباله برابر است با:

0	1	2	3	4	5	6
1	2	2	0	2	0	0

بنابراین اگر این جدول را تا 98^2 ادامه دهیم، 14 مرتبه($98/7 = 14$) این دنباله هفت عنصری تکرار می شود. در نتیجه تعداد تکرار هر یک از اعداد 0 تا 6 ، برابر است با:

0	1	2	3	4	5	6
14	28	28	0	28	0	0

ضریب بارگذاری (load facor)

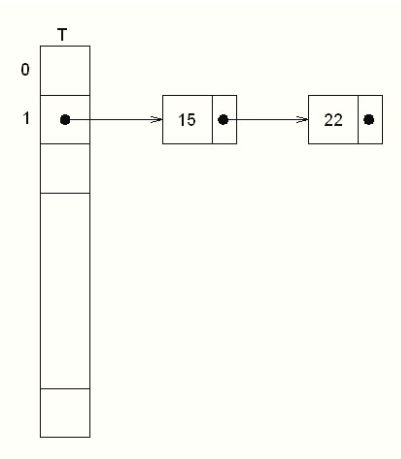
فرض می کنیم که جدول درهم سازی T به اندازه m، در خود n عنصر را ذخیره می کند. به نسبت $\frac{n}{m}$، ضریب بارگذاری می گوییم و با α نشان می دهیم.

روش زنجیره ای برای حل برخورد

در روش زنجیره ای(chaining) ، رکوردهای تصادفی به یکدیگر زنجیر می‌شوند. به عبارتی، عناصری را که به وسیله ی تابع درهم سازی به یک درایه از جدول درهم سازی، نگاشته می شوند به صورت لیست خطی یک طرفه در آورده و آدرس شروع آن را در همان درایه، یعنی T[i] قرار می دهیم. در این روش، عناصر با کلیدهای مختلف k که مقدار h(k) آنها برابر است در لیست پیوندی T[h(k)] قرار می گیرند. درایه های خالی جدول، لیست های تهی هستند.

مثال

اگر تابع درهم سازی h(k)=k mod 7 باشد،آنگاه h(15)=h(22)=1 است.



عملیات درج، حذف و جستجو در روش زنجیره ای

Insert(T,x)

Insert **x** at the head of list **T[h(key[x])]**

Deleted(T,x)

Delete **x** from the list **T[h(key[x])]**

Search(T,k)

Search for an element with key **k** in list **T[h(k)]**

نکاتی در روش زنجیره ای

- بدترین حالت زمان اجرا برای درج برابر $O(1)$ است.
- اگر تابع درهم سازی به صورت یکنوا عناصر را در جدول درهم سازی توزیع کند، هزینه میانگین جستجو $O(1)$ می باشد.
- بدترین حالت زمان اجرا برای جستجو و حذف متناسب با طول لیست است. چون اول باید با انجام یک جستجو، عنصر مورد نظر را پیدا کرد.
- اگر لیست پیوندی دو طرفه باشد، حذف عنصر می تواند در زمان $O(1)$ انجام شود.
- یک جدول درهم سازی با a درایه را در نظر بگیرد که تصادم در آن به صورت **زنجیره ای** حل می شود. اگر b عنصر در جدول باشد، میانگین تعداد عناصر در هر درایه از جدول $\frac{b}{a}$ است.

(تابع درهم ساز با احتمال برابر هر عنصر را به یک درایه از جدول نگاشت می کند.)

می خواهیم n عنصر با کلیدهای مجزا را با استفاده از یک تابع درهم ساز ساده و یکنوا در یک آرایه با اندازه m درج کنیم. میانگین تعداد **برخوردهای** دو عنصر برابر $\frac{n(n+1)}{2m}$ است. (از مرتبه $\theta(\frac{n^2}{m})$)

فرض ۱ : با این تابع، احتمال اینکه دو عنصر دلخواه و متفاوت به یک درایه نگاشت شوند برابر است.

فرض ۲ : برخوردها را به روش زنجیره ای حل می کنیم.

در یک جدول درهم سازی با روش زنجیره ای، با فرض اینکه درهم سازی یکنواخت ساده است، تعداد عناصری که انتظار می رود بررسی شوند، در یک جستجوی موفق برابر $1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2n}$ و در یک جستجوی ناموفق، برابر α می باشد. بنابراین میانگین زمان جستجوی موفق با احتساب زمان لازم برای محاسبه تابع درهم سازی برابر است با:

$$\theta(2+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2n}) = \theta(1+\alpha)$$

آدرس دهی باز

در آدرس دهی باز(open hashing) ، از یک آرایه به اندازه m به عنوان جدول درهم سازی استفاده می شود که حداکثر m عنصر در آن جای می گیرد و در هر درایه، فقط یک عنصر ذخیره می شود. بنابراین حداکثر تعداد عناصر را باید از قبل بدانیم یا از جدول درهم سازی **پویا** (dynamic hash table) استفاده کنیم. جدول درهم سازی پویا، جدولی است که اندازه آن بر حسب نیاز، کم یا زیاد می شود.(معمولا نصف یا دو برابر)

با شروع از محل تصادف، جستجوی خطی به سمت انتهای فایل شروع شده و رکورد تصادفی در اولین محل جادار درج می‌شود. وارسی به روش حلقوی انجام می گیرد.

مثال

جدول درهم سازی H[0..4] مفروض است. اگر عناصر 7 و15 و6 و10 و11 (از چپ به راست) را وارد جدول کنیم، جدول چگونه خواهد شد؟ (در صورت استفاده از روش آدرس دهی باز با وارسی خطی)(تابع Hash به صورت باقیمانده تقسیم بر 5 تعریف شده است.)

پاسخ: خروجی تابع درهم ساز برای هر یک از عناصر برابر است با:

11 % 5 = 1
10 % 5 = 0
6 % 5 = 1

15 % 5 = 0
7 % 5 = 2

بنابراین 11 در خانه 1 و 10 در خانه 0 درج می شود. اما 6 که باید در خانه 1 درج شود، چون این خانه پـر اسـت، در اولـین خانه خالی بعد از آن یعنی 2 درج می شود. سپس 15 که باید در خانه 0 درج شود ولی این خانه قـبلا پـر شـده اسـت، را در اولین خانه خالی بعد از آن یعنی 3 درج می کنیم. در نهایت 7 که باید در خانه 2 درج شود، چون این خانه قبلا پـر شـده، را در خانه 4 درج می کنیم.

بنابراین جدول به صورت زیر می باشد:

0	1	2	3	4
10	11	6	7	15

مثال

جدول درهم سازی H[0..6] مفروض است. اگر عناصر A تا G را با ترتیب {A , C , B , D , E , F , G} وارد جدول کنیم، جدول چگونه خواهد شد؟

فرض: از روش آدرس دهی باز با وارسی خطی و تابع درهم سازی زیر استفاده شود:

Key	A	B	C	D	E	F	G
hash	3	5	3	4	5	6	3

پاسخ: ابتدا A در خانه 3 درج می شود. سپس C می خواهد در خانه 3 درج شود ولی چـون پـر اسـت در خانـه 4 درج مـی شود. سپس B در خانه 5 درج می شود و ...

0	1	2	3	4	5	6
E	F	G	A	C	B	D

تعداد وارسی های مورد نیاز(شامل وارسی هایی که موجب درج می شود) برای درج هر یک از عناصر در زیر آن نوشته شده است:

E	F	G	A	C	B	D
3	3	7	1	2	1	3

که در مجموع برابر 20 می باشد.

تذکر: تعداد وارسی ها در هر ترتیب مورد قبولی نیز برابر 20 می باشد.

مثال

با توجه به مثال قبل، آیا ترتیبی برای ورود A تا G می توان مشخص کرد، که باعث جدول زیر شود؟

0	1	2	3	4	5	6
C	E	B	G	F	D	A

پاسخ: **خیر- چون ترتیب آمدن A و F متناقض است:**

الف- A قبل از F آمده است، چون در جای F نشسته است.

ب- A بعد از F آمده است، چون A در درایه ششم درج شده، پس هنگام ورود آن درایه های سوم تـا پـنجم، شـامل درایـه چهارم که F در آن قرار دارد، پر بوده است. ■

مثال

خروجی تابع Hash برای هر یک از کلیدهای A تا G در زیر آورده شده است. تعداد حالتهای مختلف ممکن برای جدول نهایی H، پس از درج هفت عنصر چند تا می باشد؟

key	A	B	C	D	E	F	G
hash	3	5	3	4	5	6	3

پاسخ:

تعداد حالات برای هر درایه در زیر آورده شده است:

درایه سوم : **۳** انتخاب. با یکی از عناصر A یا C یا G .

درایه چهارم : **۳** انتخاب. برای هر کدام از ۳ حالت پر شدن درایه سوم، درایه چهارم نیز ۳ انتخاب از بین A، C ، G و D ، منهای عنصر درایه سوم خواهد داشت.

درایه پنجم : **۴** انتخاب. شامل B یا A یا A ، C ، G و D ، منهای عناصر درایه سوم و چهارم دارد.

درایه ششم : **۴** انتخاب. تمامی حروف منهای حروفی که در درایه های سوم و چهارم و پنجم استفاده شده اند.

درایه صفرم : **۳** انتخاب.

درایه اول : **۲** انتخاب.

درایه دوم : **۱** انتخاب.

پس کل حالت ها برابر است با:

$$3\times3\times4\times4\times3\times2\times1=864$$

■

نکاتی در روش آدرس دهی باز(با فرض درهم سازی یکنواخت)

- همه عناصر در خود جدول درهم سازی ذخیره می شوند. بنابراین جدول درهم سازی می تواند پر شود که در آن صورت هیچ درج دیگری نمی تواند صورت بگیرد. یعنی ضریب بار هیچگاه بیشتر از 1 نمی شود. مظور از ضریب بار ، $(\alpha = \frac{n}{m})$ می باشد.
- تعداد مورد انتظار بررسی ها در یک جستجوی موفق حداکثر $\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\alpha}$ است. $(\alpha < 1)$

(با فرض اینکه همه کلیدهای جدول، احتمال جستجو شدن برابری دارند)

- تعداد مورد انتظار بررسی ها در یک جستجوی ناموفق حداکثر $\frac{1}{1-\alpha}$ است. $(\alpha < 1)$
- درج یک عنصر در یک جدول درهم سازی آدرس دهی باز ، در حالت میانگین به حداکثر $\frac{1}{1-\alpha}$ بررسی نیاز دارد.

درهم سازی پویا (dynamic hashing)

در روش های درهم سازی مانند باز یا زنجیره ای، تعداد عناصر حداکثر برابر اندازه جدول یا تقریبا برابر آن است. اما در بیشتر کاربردها، تعداد عناصر از قبل مشخص نمی باشند و با اعمال درج و حذف در هر لحظه، تغییر می کند. در روش درهم سازی پویا اندازه جدول درهم سازی بر حسب نیاز زیاد و کم می شود. اعمالی که بر روی این جدول درهم سازی انجام می شود عبارتند از:

درج ساده	جدول جای خالی دارد و عنصر مانند قبل در جدول درج می شود.
حذف ساده	حذفی که موجب تغییر در اندازه جدول نمی شود.
درج با گسترش	قبل از درج، جدول پر است و اندازه جدول دو برابر می شود و عناصر موجود به جدول جدید منتقل شده و سپس عنصر مورد نظر در جدول جدید درج می شود.
حذف و فشرده سازی	بعد از حذف، نسبت تعداد عناصر به اندازه جدول کم می شود. بنابراین اندازه جدول را نصف کرده و همه عناصر موجود به جدول جدید منتقل می شود.

در درهم سازی پویا اگر فقط درج داشته باشیم، فرض می کنیم که اندازه جدول همیشه توانی از ۲ است. اگر اندازه جدول در ابتدا صفر باشد، جدولی با یک درایه ایجاد می شود و عنصر مورد نظر را در آن قرار می دهیم. در غیر اینصورت، اگر تعداد عناصر موجود در جدول برابر اندازه جدول باشد، درج با گسترش انجام می شود. یعنی جدولی جدید به اندازه دو برابر جدول موجود ایجاد شده و همه عناصر موجود در جدول با تابع درهم سازی جدید در جدول جدید درج شده و جدول قبلی آزاد می شود و جدول جدید تغییر نام داده و پارامترهای آن تنظیم می شود.

مثال

مثالی از نحوه گسترش جدول برای درج های متوالی.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
اندازه جدول بعد از عمل i ام	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16	16	16
تعداد گسترش ها	1	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5

تعداد کل گسترش ها برای n درج، برابر $\lceil \lg n \rceil + 1$ است.

هزینه درج i ام برابر است با :

الف- برابر **یک** است، اگر گسترش نداشته باشیم.

ب- برابر $n_{i-1}+1$ است، اگر گسترش داشته باشیم.

(چون قبل از درج آخر باید n_{i-1} عنصر موجود در جدول قبلی به جدول جدید منتقل شوند.)

(n_i : تعداد عناصر جدول بعد از عمل i ام)

بنابراین مجموع هزینه n عمل درج برابر است با:

$$n + \sum_{k=0}^{\lceil \lg n \rceil} 2^k = n + 2^{\lceil \lg n \rceil + 1} - 1 = n + 2 \times 2^{\lceil \lg n \rceil} - 1 \approx n + 2n - 1 \le 3n$$

یعنی هزینه سرشکن شده هر درج حداکثر ۳ واحد یا $O(1)$ است.

مثال

یک جدول درهم سازی را در نظر بگیرید که اندازه ی آن در ابتدا 1 است و آن درایه هم خالی است. درهم سازی هم به صورت بسته(در مقابل زنجیره ای) است و با یک تابع درهم سازی ساده و وارسی خطی انجام می شود. برای درج یک عنصر x ، اگر جدول جا داشته باشد، x یک راست درج می شود و گرنه اندازه جدول را دو برابر می کنیم و عناصر فعلی را با هزینه ای برابر تعداد شان، به جدول جدید منتقل می کنیم و سپس x در جدول جدید درج می شود. اگر 12 عنصر در این جدول درج شوند، هزینه کل در مجموع چه مقدار خواهد بود؟ (توجه کنید که هزینه در اینجا تعداد نوشتن در جدول است و بقیه هزینه ها را ثابت فرض می کنیم.)

پاسخ:

در ابتدا چون اندازه جدول 1 است، عنصر اول را درج می کنیم. برای درج عنصر دوم، چون جدول جا ندارد، اندازه جدول دو برابر شده و سپس عنصر جدید را درج کرده و عنصر موجود در جدول قبل را به جدول جدید منتقل می کنیم. برای درج عنصر سوم، چون جدول جا ندارد، اندازه جدول دو برابر شده و دو عنصر قبلی با هزینه 2 به جدول جدید منتقل شده و عنصر جدید نیز درج می شود. برای درج عنصر چهارم، نیازی به دو برابر کردن اندازه جدول نیست، چون یک جای خالی در جدول موجود است. برای درج عنصر پنجم، چون جدول جا ندارد، اندازه جدول دو برابر شده و چهار عنصر موجود در جدول قبل به جدول جدید منتقل شده و عنصر پنجم درج می شود. به همین ترتیب ادامه داده و جدول زیر را پر می کنیم:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
اندازه جدول	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16	16	16
هزینه		1	2		4				8			

$$(1+2+4+8)+12=(2^4-1)+12$$

بنابراین هزینه کل نوشتن n عدد برابر $n+\sum_{k=0}^{\lceil \lg n \rceil} 2^k$ می باشد.

اگر بخواهیم عمل حذف را نیز کنار درج انجام دهیم، باید عمل فشرده سازی جدول را که با یک حذف انجام می شود، تعریف کنیم. در این حالت، عنصر مورد نظر را حذف می کنیم، سپس اگر تعداد عناصر موجود نسبت به اندازه جدول از حدی کمتر شد،اندازه جدول را نصف می کنیم و همه عناصر را به جدول جدید منتقل می کنیم. عمل فشرده سازی را وقتی انجام می دهیم که عمل i ام حذف و ضریب بار نیز $\alpha_{i-1}=\frac{n_{i-1}}{s_{i-1}}\le\frac{1}{4}$ باشد.

(s_i اندازه جدول بعد از عمل i ام) (n_i تعداد عناصر جدول بعد از عمل i ام)

کنکور ارشد

(مهندسی IT – دولتی ۸۹)

۱- فرض کنید که یک جدول درهم سازی به اندازه 80 از روش آدرس دهی خطی باز استفاده می کند. ابتدا جدول خالی بوده است و تنها عملیات اضافه کردن و جستجو روی جدول انجام شده است. در حال حاضر وضعیت درایه های 45 تا 56 جدول به صورت زیر است. اعداد بالای آرایه، اندیس درایه ها و اعداد پایین آرایه خروجی تابع درهم سازی است. اگر یکبار دیگر از جدول درهم سازی خالی شروع کنیم و همان عملیات را به غیر از اضافه کردن کلید e دوباره انجام دهیم، در درایه ی 50 چه کلیدی قرار می گیرد؟

45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
	a	b	c	d	e	f	G	h	i	j	
	46	46	46	47	46	51	47	46	48	49	

۱) i ۲) g ۳) f ۴) h

حل: جواب گزینه ۲ است.

با وارد کردن کلیدهای قبل از e یعنی d,c,b,a به جدول خالی، خواهیم داشت:

45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
	a	b	c	d							

حال با توجه به صورت تست، از e صرف نظر می کنیم. کلید f را در خانه با اندیس 51 قرار می دهیم چون خروجی تابع درهم ساز برای آن برابر 51 است:

45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
	a	b	c	d		f					

کلید g را طبق خروجی تابع درهم ساز باید در خانه با اندیس 47 درج کرد، ولی این خانه قبلا توسط b پر شده است، بنابراین با توجه به روش آدرس دهی خطی باز، از آن خانه به سمت جلو حرکت کرده و g را در اولین خانه خالی یعنی 50 قرار می دهیم. بنابراین در درایه 50، کلید g قرار می گیرد.

دسته‌بندی موضوعی آموزش‌های فرادرس، در ادامه آمده است:

			
برنامه نویسی – کلیک (+)	آموزش های دانشگاهی و تخصصی – کلیک (+)	هوش مصنوعی و یادگیری ماشین – کلیک (+)	مهندسی برق الکترونیک و روباتیک – کلیک (+)
			
دروس دانشگاهی – کلیک (+)	مباحث مشترک – کلیک (+)	مهارت های دانشگاهی – کلیک (+)	نرم افزارهای تخصصی – کلیک (+)
			
مهندسی نرم افزار – کلیک (+)	نرم افزارهای عمومی – کلیک (+)	طراحی و توسعه وب – کلیک (+)	آموزش های عمومی – کلیک (+)

منبع مطالعاتی تکمیلی مرتبط با این کتاب

آموزش ساختمان داده‌ها

ساختمان داده‌ها، یکی از دروس مهم و پایه‌ای دانشگاهی است که پیش نیاز دروس مختلف رشته کامپیوتر است و به عنوان مبحثی که نکات فراوانی دارد، در کنکور کارشناسی ارشد کامپیوتر و کنکور دکتری هوش مصنوعی و نرم‌افزار از دروس با ضرایب بالا می‌باشد.

آموزش ساختمان داده‌ها، توسط مهندس فرشید شیرافکن، یکی از بهترین مدرسین مسلط به مباحث ساختمان داده‌ها، ارائه شده است.

مدرس: مهندس فرشید شیر افکن

مدت زمان: ۱۰ ساعت

جهت مشاهده آموزش ویدئویی این آموزش – کلیک کنید **faradars.org /fvds9402**